

実技競技①

「にほんの振り子」 —連成振り子の物理—

解答例と解説

(解答例)

問 1

(1)

糸の長さ l [cm]
99.4

(2)

周期 T_{+1} [秒]
2.01

問 2

(1)

10 往復_実測値 [秒]			周期 T_1 [秒]	糸の長さ l_1 [cm]
1 回目	2 回目	3 回目		
19.97	19.99	20.01	2.00	96.6

(2)

10 往復_実測値 [秒]			周期 T_2 [秒]	糸の長さ l_2 [cm]
1 回目	2 回目	3 回目		
20.06	20.06	20.00	2.00	97.2

問 3

(1) ストロークの位置 10 cm の場合

振動の条件	10 往復_実測値 [秒]			周期 T_1 [秒]
	1 回目	2 回目	3 回目	
<同方向条件>	19.98	19.96	20.02	2.00
<逆方向条件>	18.86	18.86	18.87	1.89

ストローの位置 20 cm の場合

振動の条件	10 往復_実測値 [秒]			周期 T_1 [秒]
	1 回目	2 回目	3 回目	
<同方向条件>	19.88	19.92	19.98	1.99
<逆方向条件>	17.85	17.88	17.85	1.79

(2)

ストローの 支点からの距離	<同方向条件> 糸の長さ $l_{同}$ [cm]	<逆方向条件> 糸の長さ $l_{逆}$ [cm]
10 cm	96.5	85.6
20 cm	95.9	76.5

問 4

(1) (2)

解答となる計測値は、解答用紙 p.7 の記録シートに記入する。

解答となるグラフは、別紙のグラフ用紙に記入する。

(3)

ストローの 支点からの距離	t_{1-20} [秒]	T_{1-20} [秒]
20 cm	18.58	1.91

(4)

ストローの 支点からの距離	t_{1-10} [秒]	T_{1-10} [秒]
10 cm	40.56	1.95

問5

(1)

(2)のための比較

ストローの 支点からの距離	T_{s1} [秒]	T_{s2} [秒]
10 cm	1.90	2.00
20 cm	1.82	2.01

問3(1)より方向に注意して転記	
<逆方向条件>	<同方向条件>
1.89	2.00
1.79	1.99

(2)

※この解答は実際の測定の誤差に応じた考察となる。以下、解答例にあげた結果を得た場合について記す。

【比較1】問5(1)で求めたうなりの原因となる2つの波の周期 T_{s1} , T_{s2} は、ストロー位置 10 cm の場合は 1.90 秒と 2.00 秒、20 cm の場合は 1.82 秒と 2.01 秒であった。一方、問3で求めた<逆方向条件>と<同方向条件>の周期は 10 cm で 1.89 秒と 2.00 秒、20 cm で 1.79 秒と 1.99 秒であった。

10 cm の場合は小数点以下2桁目の四捨五入の影響を考えると、2つは一致していると判断できる。20 cm の場合も有効数字2桁で一致している。

【比較2】さらに、問3の<同方向条件>と<逆方向条件>の周期の振動が、うなり現象の元となる2つの波であると仮定してうなりの周期を計算する。

10 cm の場合は約 34 秒、20 cm の場合は約 18 秒となる。一方、問4で実測されたうなりの周期は 10 cm で 41 秒、20 cm で 19 秒である。

20 cm の場合は、実測値と計算値は十分に近く、<同方向条件>の振動（振り子全体の振動）と<逆方向条件>の振動（ストローから下の振動）がうなりの元となる2つの波であると考えられる。

10 cm の場合、両者は 10 %以上のズレがあるが、【比較1】では2つの波の周期とほぼ一致している。このように検証のアプローチによって差が生じたのは、うなりを引き起こしている2つの波の周期が近いため、わずかな誤差が計算に大きく影響を与えているからだと考えられる。実際、問3で測定した周期は、小数点以下3桁目を四捨五入しているため、それぞれの値が 1.995 と 1.894 であったとしてうなりの周期を計算すると、うなりの周期は 37 秒となり、実測に近い値となる。

以上のことから、問3の結果をもとに計算したうなりの周期も、問4の結果から計算した2つの振動の周期（問5(1)の結果）も、それぞれにより一致を示しており、<同方向条件>の振動（振り子全体の振動）と<逆方向条件>の振動（ストローから下の振動）がうなり現象を引き起こしている2つの波と考えられる。

問6

(1)

振り子1の振動を 45° 方向から始めると、最初はストローと平行な方向の動きのみで共振現象が見られ、静止していた振り子2はストローと平行方向の動きのみを始める。

観察時間を長くすると、振り子2もストローと垂直な方向の振動を始める。このときの2つの振り子の動きは直線的ではなく、円や楕円を描くようになる。

その後さらに観察を続けると、振り子2の垂直な方向の振幅の変化の周期（うなりの周期）は、ストローに平行な方向のうなりの周期と比較してかなり長い。

(2)

ストローに平行な方向の振り子1と振り子2の動きは、問5までと同様に＜同方向＞と＜逆方向＞の2つの振動の組み合わせによるうなりとして理解できる。

ストローに垂直な方向の＜同方向＞の振動と＜逆方向＞の振動の実験・観察を行った。＜同方向＞の振動の周期はストローと平行な方向のときと変わりなく、＜逆方向＞の振動の周期は、ストローの中央付近を中心としたねじれ回転と連動した振動の周期となっていた。その周期は、ストローと平行な方向のときの＜逆方向＞の周期より比較的長いことが分かった。

ストローに垂直な方向の振り子1と振り子2の動きは＜同方向＞と＜逆方向＞の2つの振動の重ね合わせで考える。上の実験観察より、2つの振動の周期の差はストローに平行な方向の振動より小さいので、垂直な方向のうなりの周期はストローに平行な方向と比べてかなり長くなる。観察時間を長くすると、振り子2もストローと垂直な方向の振動を始めることになる。

これらの振動が重なって、2つの振り子の動きは直線的ではなく、円や楕円を描くように見える。

問4 記録シート

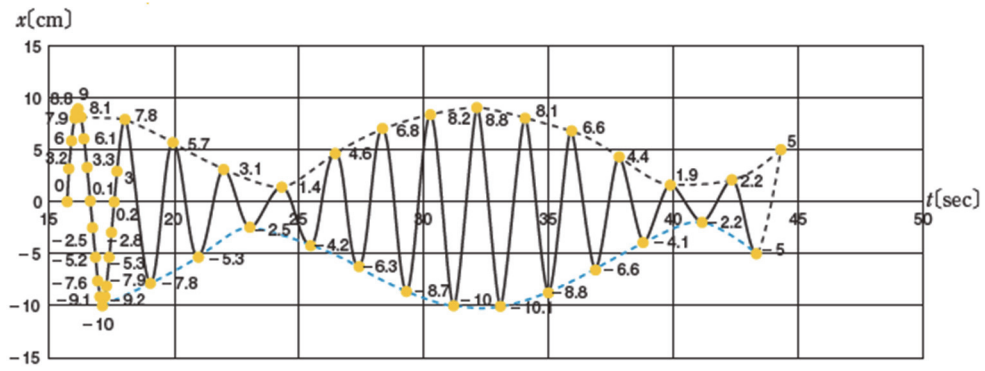
(1)

	経過時間 t [秒]		振り子1の位置
	タブレット表示時刻	通過後時間	x [cm]
1	15.72	0.00	0.0
2	15.82	0.10	3.2
3	15.92	0.20	6.0
4	16.02	0.30	7.9
5	16.12	0.40	8.8
6	16.22	0.50	9.0
7	16.32	0.60	8.1
8	16.42	0.70	6.1
9		0.80	
10		0.90	
11		1.00	
12		1.10	
13		1.20	
14		1.30	
15		1.40	
16		1.50	
17		1.60	
18		1.70	
19		1.80	
20		1.90	
21		2.00	

(2)

	経過時間 t [秒]		振り子1の位置
	タブレット表示時刻		x [cm]
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			
47			
48			
49			
50			
51			
52			

実技競技①
「にほんの振り子」 解答例と解説



(解説)

【問題のねらい】

問1は、周期が2.00秒となる振り子の糸の長さ、糸の長さの変化により周期がどの程度変化するかを計算する問題です。簡単な計算問題ですので、なぜこのような問題が最初にあるのか不思議に思った人もいるかもしれません。実は、この問題は最初の案には含まれておらず、周期2.00秒の振り子を作るところから問題は始まっていました。ところが、振り子の長さ調整に予想より時間がかかることが分かって、素早く調整するためのヒントとしてこの問が加えられました。

周期2.00秒の振り子を作るときに、糸の長さを感覚的に頼って変えていたのでは手早く調整できません。計算により必要な長さを求めて、おおよその長さで振り子を作成し、その周期を実測し、実測値と目標値の差をもとに、糸の長さの補正値を計算すれば、1回の調整で、ほぼ目標値を実現できます。問1は計算をもとに糸の長さ調整をするように誘導するためのものなのです。

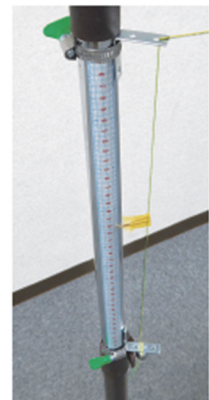
行う事柄について、見通しを立ててから実験をすると、効率よく作業を進められます。もちろん、やってみないとどうなるかまったくわからないこともあります。でも、科学的な根拠にもとづく予想や見通しをもって実験を行えば、思わぬことが生じても素早く気づけます。見通しをもって実験を進めることは、効率よく実験を行うために重要であるばかりでなく、イレギュラーなことに気が付くためにも重要なことです。

実験装置には、糸の調整を効率よく行うための工夫がいくつかなされています。



周期の調整で糸の長さを変えるのに、糸の結び目をほどいて結びなおしていたのでは、正確な調整も困難ですし、時間もかかってしまいます。そこで、糸のもう一方の端をL字金具に巻き付けて摩擦で糸を止めるようにしました【写真左】。

また、糸の長さを直接計測するのではなく、差分を簡単に測定できるように、支柱にメジャーテープを貼り付けるように指示

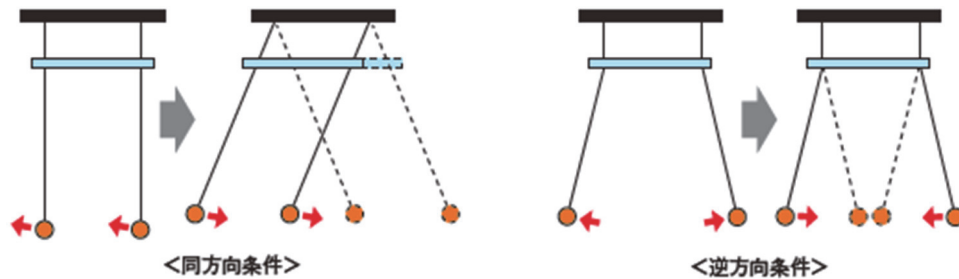


しました【写真右】。これらの意味に気がつかないで実験を行ったグループもあるかもしれません。人の作った物には、不思議に思えても、そうなっている理由があることが多いものです。何か、気にかかることがあったら、その理由を考えるようにすると、新しいものが見えてくることもあるでしょう。

振り子2の長さは、原理的に1番目の振り子と同じになるはずですが、両方の長さが同じになるように最初に調整すべきですし、もし、2つの振り子の長さが見た目でも違う状態になっていたら、何かがおかしいと考えなければなりません。計測間違いかもしれませんし、上の支柱が傾いているのかもしれません。

共振とうなりは、高等学校の教科書では、近いページに掲載されています。しかし、それらの間の関係については、説明がありません。でも、これらの現象は密接な関係があります。

今回の実験を通して気が付いてほしいと思っていたことは、うなりを引き起こした2つの振動（同方向条件と逆方向条件）では、それぞれの振り子の振れ幅が変わることなく揺れ続けることです。同方向条件の振動は、2つの振り子の周期が等しく、同時に動いているのでストローの部分の距離は一定で、ストローを介して力がかかりません。逆方向条件では、ストローに力がかかりますが、2つの振り子で逆方向に力がかかるので相殺^{そうさい}して、ストローは動きません。このため、振り子の周期はストローより下の糸の長さで決まります。



同方向条件や逆方向条件のように、それぞれの振り子の振れ幅の変化が時間によらない振動を固有モードと言います。今回の実験で生じた共振現象は、同方向条件と逆方向条件の2つの固有モードがもとになって生じています。

今回の実験では、ストローの位置を上から10 cmと20 cmの2か所としました。ストローの位置をもっと下にすると、2つの振り子の動きが目まぐるしく変わって共振運動ではなく、ランダムな動きに見えるようになります。その場合でも、振り子の動きは同方向条件の動きと逆方向条件という2つの固有モードの動きの重ね合わせで解析できます。

【実験2-2】まででは、振り子の動きは1方向（ストローと平行な方向）に制限されていて、振り子が2つなので、固有モードの数は2となります。

【実験4】では、ストローに垂直な方向の動きが加わります。ストローに平行な方向と垂直な方向の動きは独立したものです。それぞれの方向で、2つずつの固有モードがありますので、固有モードの総数は4つになります。垂直方向の固有モードには、2つの振り子が同じ方向に一緒に動くものと、逆方向に動くものが考えられます。同方向に動くものは、2つの振り子の糸の間隔は変化しませんので、水平方向の同方向条件と同じように元の振り子と同じ周期になります。逆方向に振れる場合は、水平方向の場合とは異なり、ストローはねじれるような動きとなります。ストローの端も振り子と同じ方向に動いて、糸はストローのところで折れ曲がります。ストローがねじれる動きの場合は、同方向条件と水平方向の逆方向条件の中間的な動きになっていますから、振動周期も両者の間になっていると予想できるかと思います。その結果垂直方向のうなりの周期は水平方向より長くなります。

複数の振り子（単振動）の連動は、化学や物理のいろいろな場面で形を変えて現れてきます。いずれの場合も固有モードを考えることで複雑に見える動きを単純な動きの重ね合わせとして理解できるようになります。以下、化学と物理（固体物理）で粒子の振動が関わる事柄を紹介しします。

【分子振動】

ヘリウムなどの単原子分子を除くと、分子は2つ以上の原子が結合して構成されています。化学結合を引き起こす力を理解するためには「量子力学」が必要なのですが、それは、大学で教わる事柄ですので、ここでは、分子を原子がバネで結合した集合体であると近似的に考えることにします。実際の分子は、原子間距離を引き離していくと、別々の原子になってしまいますから、本当のバネのように弾性エネルギーが距離の2乗に比例し続けることはなく、図1に示したように一定の値へと収束してしまいます。でも、弾性エネルギーが最小となる部分では、エネルギーの距離依存性を2次関数でよく近似でき、分子の振動をバネの単振動としてあつかうことができます。

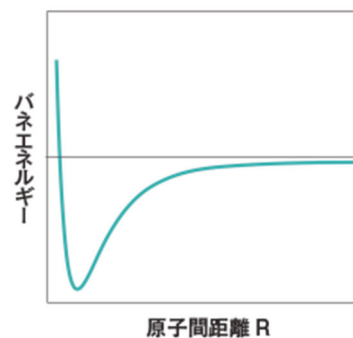


図1 原子間距離とエネルギー

原子は、おもりに比べればはるかに軽いものです。そして、化学結合は強固なものなので、分子バネの単振動の振動数は身の回りのバネに比べて非常に高くなります。たとえば、HClの単振動の振動数はおよそ 8.7×10^{13} Hzです。この振動数は赤外線領域の光の振動数で、HCl分子はこの振動数の光を吸収します。

HClの場合、水素と塩素の間隔が伸び縮みする振動しかありませんが、二酸化炭素などのように3つ以上の原子からなる分子では、より複雑な一見するとランダムな振動運動が生じます。しかし、一見するとランダムな動きも、図2に示すような3種類の「固有モード」の組み合わせなのです。対称伸縮振動は中心の炭素は動かずに、左右の酸素が対称的に伸縮する運動です。非対称伸縮振動は両端の酸素が同方向に、真中の炭素が、それを打ち消すように反対側に動く振動運動です。変角振動はまっすぐだった分子が折れ曲がる運動です。それぞれの固有モードは異なる振動数で運動しています。

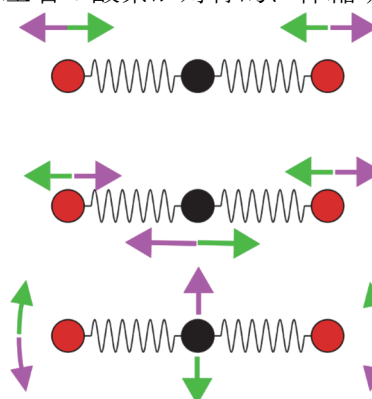


図2 二酸化炭素の分子振動

n 個の原子からなる分子の固有モードの数は $3n-6$ （二酸化炭素のような直線分子の場合は $3n-5$ で、変角振動が面内での動きと面に垂直な方向の動きの2つ独立な固有モードになっています。）あることが知られています。例えばエタノールは、9個の原子を含み、直線分子ではないので、固有モード数は21です。それらの中でO-Hの伸縮が関連するような振動は、分子の他の部分の影響をあまり受けないので、エタノールでも、アルキル鎖の長いアルコールでも、同じ程度の振動数を持っています。この性質を利用して、赤外線吸収測定は、分子の中に、O-HやC=Oなどの特定の化学結合が存在するかを調べるのに用いられています。

部分的な振動ではなく、分子全体の振動は、分子全体の質量が原子に比べると大きいので、より低い振動数となります。波長にすると遠赤外線に相当するものもあります。この領域の振動は、分子全体の特性が反映したもので、個々の分子の識別に使うことができます。この領域の吸収を使って、危険物が入っている封筒を開封せずに調べるという研究も行われています。

【結晶中の原子の振動】

固体（結晶）では、原子は周期配列しています。結晶中の原子は熱エネルギーにより振動しています。原子は格子状に並んでいることから、これを結晶格子とよび、原子の振動のことを格子振動と呼びます（格子模型）。格子振動はまさにここで考えたように基準となる単振動（固有振動）の重ね合わせ（振幅の和）で表せます。

結晶の固有振動がどのようなものかを粒子が1列に並んで伸縮運動をする場合（1次元系）について考えてみましょう。図3では粒子が4つ1列にならんでいます。粒子の間隔は a です。固有モードは粒子が同時に全て同じ方向に動くもの（これは振動ではなく並進運動ですが振り子の同方向条件に対応するものです）、左右で逆方向に動く物、両端と真中の2つが逆方向に動く物、1つずつ逆方向に動くものの4種類になります。この粒子の動きは弦の振動と似たところがあります。

弦の振動では、1番周波長が長いものは弦の長さを L として、 $2L$ 、2番目は L 、3番目は $2L/3$ 、 n 番目は $2L/n$ になります。

図3には粒子の他に、それぞれの粒子の振幅を曲線で示しています。1番波長の長いものは、粒子が全て同位相で同じ方向に動くので、波長は無限大になります。この動きでは復元力が働きませんので、振動数は0になります。2番目のものは波長が $6a$ 、3番目は $3a$ 、4番目は $2a$ となり、これらはそれぞれ定まった振動数での振動運動となります。波長が短いものほど振動数は高くなります。

弦の振動と粒子の振動を比べると2つ違いがあります。1つ目は弦の振動は固定端ですが、粒子の振動は自由端となっていることです。2つ目は弦の振動ではいくらかでも短い波長の定常波を考えられるのですが、粒子の場合には最短波長が $2a$ でそれより短い波を考えても粒子の動きとしては、 $2a$ より波長が長い場合と同じになってしまうことです。図3では波長が $1.5a$ のものも記してありますが、粒子の動きは波長が $3a$ の場合と同じになってしまっています。

実際の結晶ではアボガドロ数程度の粒子がつながっています。粒子の間隔を a として、1番長い固有モードは波長が無限大、1番短いものは $2a$ で、固有モードの数は n 個になります。波長と振動数の関係をグラフにするのに横軸を波長にすると、1番長い波長が無限大になって図を描くのが困難ですので、波長の逆数に比例する“波数： k ”を用います。波数と波長の関係は、 $k=2\pi/\lambda$ です。このような格子振動は音響モードと呼ばれています。

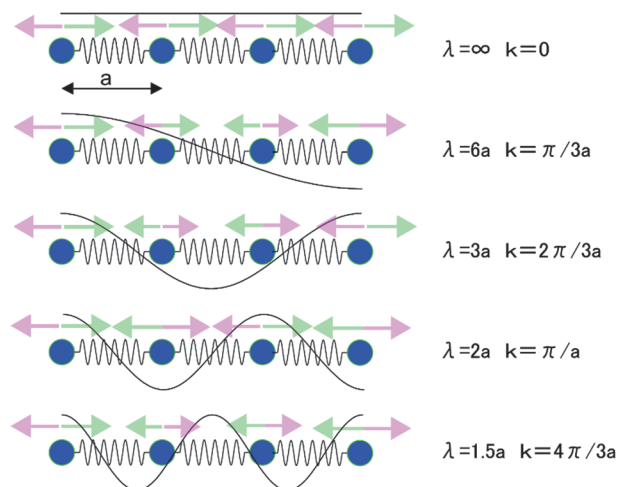


図3 固有モードと弦の振動

「にほんの振り子」解答例と解説

ここまでの話では同じ粒子が並んでいるとしていましたが、食塩のように2種類の粒子が交互に並んでいる結晶では、ここまで考えていなかった振動モードがあります。1列にならんだ塩の格子に横方向に電場をかけることを想像してください。Naはプラス、Clはマイナスに荷電していますから格子は図4の上から2番目のように変形し電場をすればNaとClが互いに逆方向に動く振動運動を始めます。格子の周期はNa(またはCl)間の距離です。同種の原子に着目すれば、すべて同じ方向に動いているので、波としての波長は無限大で波数は0です。単一粒子の場合は波数0では振動数は0になるのですが、2種類の粒子が逆方向に動く場合は粒子間で復元力が働いていますので振動数は有限値となります。2種類の粒子で説明した振動は光学モードと呼ばれ、結晶の赤外から遠赤外領域での光吸収の原因となります。

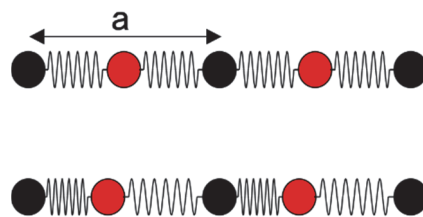


図4 2種類の原子で構成された結晶の固有モード

格子振動は固体の様々な性質に影響しています。熱による振動は伝わっていくので、熱伝導の原因となり、温度によって振動の振幅は変化しますから比熱に関係することは理解できるでしょう。音響モードの固有振動の数を考えることにより、固体の高温での定積比熱が気体定数の3倍になるというデュロン・プティの法則、さらに、低温で比熱が絶対温度の3乗に比例するという現象が説明されます。

また、格子振動によって、結晶内を移動する電子が散乱されますが、温度があがって格子振動が激しくなると電子もより散乱されるため、電気抵抗が高くなります。一方、極低温では電子が結晶イオンを引き付けることにより歪んだ格子に他の電子が引き寄せられることにより、電子が互いに引き合う効果が現れ、2つの電子がペアとして振る舞い、超伝導という現象を引き起こすことが知られています。