第5回
科学の甲子園 全国大会

実技競技②「7回表裏：風船の物理」

解答例と解説

（解答例）

方法 1

〔実験1：風船を膨らませる仕事の測定〕	②の測定値（風船を付けない場合） 伸びの長さ（mm）：10，10.5，9.5，10，9.5，11，10，9.5，9.5，10.5 ……10 回の測定の平均値は　10 mm 縮みの長さ（mm）：10，9.5，10，9.0，9.5，9.0，9.0，9.5，9.5，9.0 ……10 回の測定の平均値は　9.4 mm $<x_0> = \dfrac{(10.0+9.4)}{2} = 9.7\ \mathrm{mm}$
	④の測定値（風船を付けた場合） 伸びの長さ（mm）：27，28，28.5，27，28，25.5，26.5，27，24.5，25.5 ……10 回の測定の平均値は　26.8 mm 縮みの長さ（mm）： ：25，25.5，26，24.5，24，24，25.5，24.5，25.5，24.5 ……10 回の測定の平均値は　24.9 mm $<X> = \dfrac{(26.8+24.9)}{2} = 25.9\ \mathrm{mm}$
【課題1】	$<x_0> =$ 0.0097〔m〕 $<X> =$ 0.0259〔m〕　より $L =$ 0.13〔m〕　で 50 往復であるから $F = k\cdot(<X> - <x_0>) = 300 \times 0.0162 =$ 4.86　〔N〕 $W = 50 \times 2 \times L \times F = 100 \times 0.13 \times 4.86 =$ 63.2　〔J〕

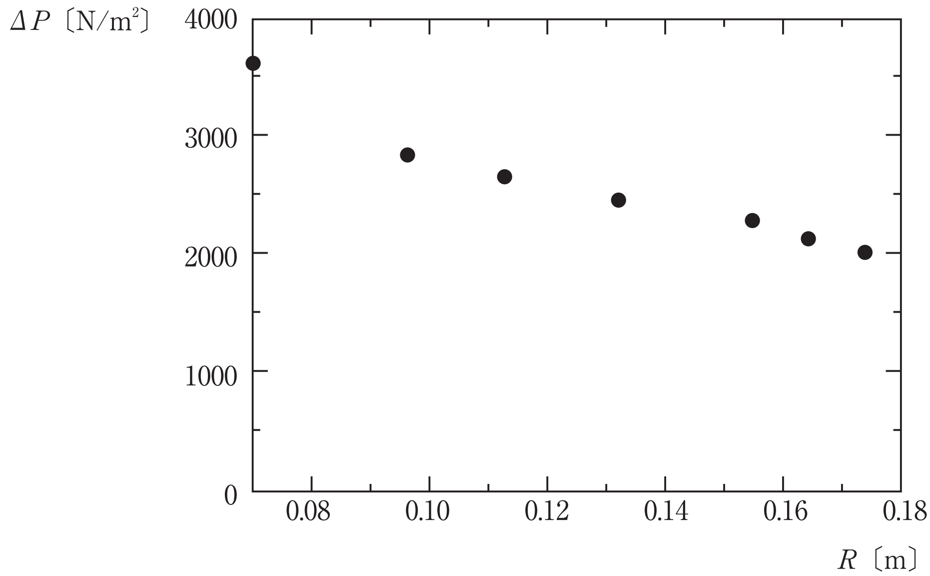
方法2

〔実験2：風船内部の気圧の測定〕

測定値と R および ΔP

ポンプの往復回数 n	風船の周の長さ L	風船の半径 R	Δh	ΔP
5	44	0.0701	37.1	3636
10	60	0.0955	29.1	2852
15	71	0.1131	27.2	2666
20	83	0.1322	25.2	2470
30	97	0.1545	23.4	2293
40	103	0.1640	21.8	2136
50	109	0.1736	20.5	2009

R に対する ΔP のグラフ



【課題2】

$n = 50$ 回（往復の回数）のとき　$R =$ <u>0.174 〔m〕</u>

$\Delta h =$ <u>0.205 〔m〕</u>

$\Delta P =$ <u>2010 〔N/m²〕</u>

$$T = \frac{2010 \times 0.174}{2} = \underline{175\ 〔\mathrm{N/m}〕}$$

$$E = 4\pi R^2 T = 4 \times 3.14 \times 0.174 \times 0.174 \times 175 = \underline{66.5\ 〔\mathrm{J}〕}$$

【課題1と課題2の結果に関する考察】

以下の事について検討することが考えられる。

【課題1】

・実験1で読み取った値が W の計算で100倍することになり，読み取り誤差の影響が大きい。

・風船を膨らませていく過程で，加える力 F の大きさが異なっている。

【課題2】

・風船の膨らみ方によって ΔP の大きさが異なっている。

・風船の形が完全な球体ではなく，ゴムの張力も全表面で一様ではない。

【W と E の値について】

・W，E の値の差についての考察が，論理的であるかないか。

・風船が膨らむ過程で，周りの空気に対する仕事など，人の仕事の一部が散逸してしまい，ゴム膜のエネルギーになっていない。

【発展課題】

50往復分膨らませた風船が進んだ距離　＝　11.2　〔m〕

25往復分膨らませた風船が進んだ距離　＝　8.1　〔m〕

＜考察＞

風船の持つエネルギーは2倍ほど異なるはずであるが，50回分の空気を入れても25回のときの1.4倍程度の距離しか飛ばないことが確かめられる。

この結果について，例えば次のような考察をすることができる。

・膨らみ方が大きいほど，風船が受ける空気抵抗が大きくなること。

・膨らみが大きいほど，風船の質量が大きく，糸とスライダー甲との摩擦抵抗も大きくなること。

・実験2の測定結果から，風船が膨らむほど内部の圧力が小さくなること。

【解説】

ラプラスの式は，風船やシャボン玉のような膜の張力に関するつり合いの式である。膜にはたらく張力を，図 1 のように 2 方向の曲率半径で表す。

図 2 のように一方向の曲率半径の断面で考えると，膜の左右の端の長さは $R_2\theta_2$（図 1）であり，この膜の微小曲面要素の左右にはたらく張力の大きさは，$TR_2\theta_2$ となる。

この力は膜の接線方向に向いているので，球の中心方向に向く張力の合力の大きさは，図に示すように　$2TR_2\theta_2 \cdot \sin\left(\dfrac{\theta_1}{2}\right)$　と表すことができる。

したがって微小曲面要素にはたらく 4 つの張力の合力の和は，

$$2TR_2\theta_2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + 2TR_1\theta_1 \cdot \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad \sim \quad T(R_2\theta_2\theta_1 + R_1\theta_1\theta_2)$$

と表される。

この合力を微小曲面要素の面積　$R_1\theta_1 \cdot R_2\theta_2$

で割った値（単位面積の力），

$$\frac{T(R_2\theta_2\theta_1 + R_1\theta_1\theta_2)}{R_1\theta_1R_2\theta_2} = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

が，風船の内部と外部の圧力差 $\varDelta P$ とつり合っていることになる。

曲面が球面である場合には，2 つの曲率半径が等しいので　$R_1 = R_2 = R$

よって　$\varDelta P = \dfrac{2T}{R}$　というラプラスの式を得ることができる。

図 1

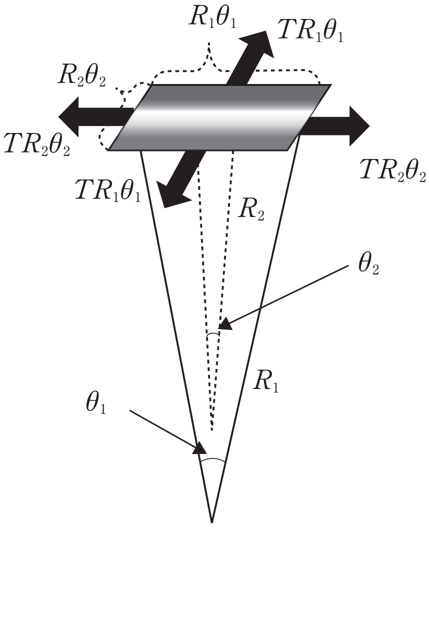
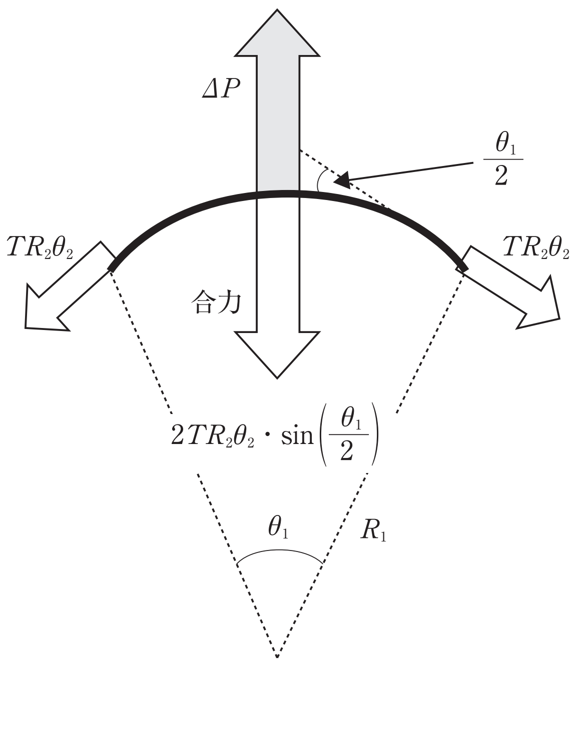


図 2



（ゴムの張力を求める別の実験方法）

ゴム膜が持つエネルギーを，ゴム膜に直接おもりをつり下げたり，ばねばかりなどで引き伸ばすなどの方法で求めることができる。

ゴム風船は常に球形であるとして，空気を入れる前のゴム風船の半径は R_0 であり，空気を入れて半径が R になったとする。

膨らんだゴム風船の円周の長さは $2\pi R_0$ から $2\pi R$ に伸びているから，

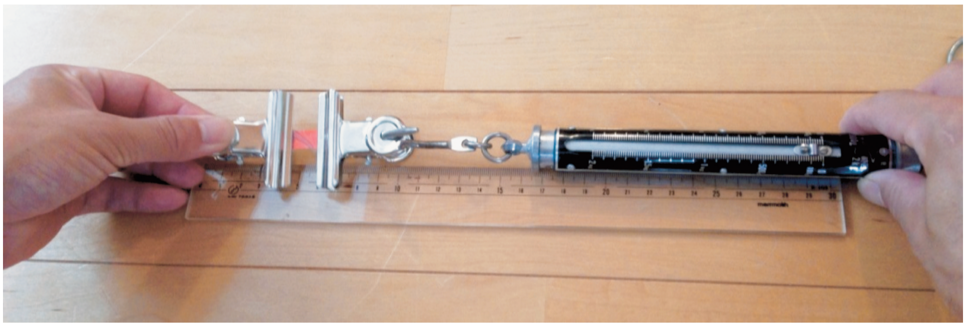
伸長比　$\varepsilon=\dfrac{2\pi R-2\pi R_0}{2\pi R_0}=\dfrac{R-R_0}{R_0}$　であり，

ゴム膜にはたらく張力 T〔N/m〕は膜の弾性係数を k〔N/m〕として

$$T=k\varepsilon=k\cdot\frac{R-R_0}{R_0}$$

と表すことができ，この式から T を計算して求めることができる。

例えば，風船を切り開いて 1 cm 幅に切り出し，目玉クリップなどで下の写真のようにばねばかりで引いて，ゴム膜に加える力と膜の伸びの関係を記録し，グラフを描いてこの傾きから膜の弾性係数 k を求めることができる。



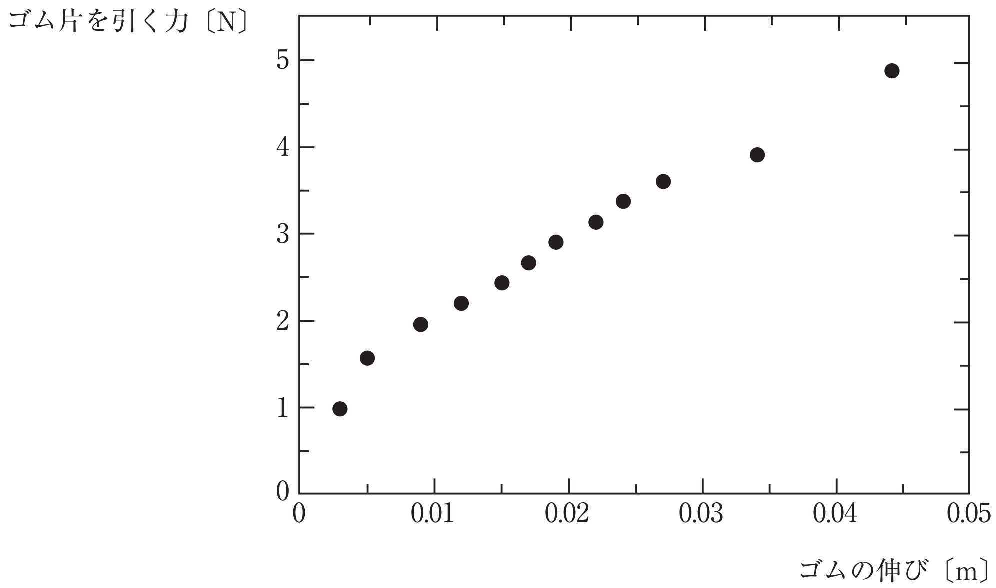


図　ゴム片にはたらく力とゴムの伸びの関係

上記の結果から　$k=71.9$〔N/m〕　という値を得ることができる。

この値と

$$R_0 \quad = \quad 0.048〔\mathrm{m}〕,\ R \quad = \quad 0.174〔\mathrm{m}〕より,$$

$$T \quad = \quad 71.9\times\frac{0.174-0.048}{0.048} \quad = \quad 189〔\mathrm{N/m}〕$$

$$E \quad = \quad 4\pi R^2 T = 4\times 3.14\times 0.174\times 0.174\times 189 \quad = \quad \underline{71.9 \quad 〔\mathrm{J}〕}$$

という結果を得ることができる。