第４回
科学の甲子園 全国大会

実技競技③「登れ！ 筑波山」

解説

実技競技③「登れ！ 筑波山」に出場された皆さん，お疲れ様でした。本競技を制覇するために，入念な準備をしてきたことでしょう。今年度の競技のテーマは，「エネルギーの変換と，その効率的な利用」でした。

近年，様々なエネルギーを電気エネルギーに変換し，効率良く(省エネルギーで)利用するための技術が盛んに研究，開発されています。「回生ブレーキ」も，そのような技術の一つで，本競技の重要な要素でした。「回生ブレーキ」とは，電動機(モーター)を発電機として作動させ，制動(ブレーキ)時に発生する運動エネルギーを電気エネルギーに変換して回収(蓄電)するシステムです。すでに電動機を動力とする鉄道車両や自動車，電動アシスト自転車などに搭載されている例もあり，ハイブリッドカーにおいても燃費を上げるためにこのシステムが採用されています。自動車レースの最高峰であるフォーミュラワン(F1)においては，2014 年に運動エネルギーのみならず熱エネルギーも回生する「エネルギー回生システム(ERS: Energy Recovery System)」をパワーユニットに搭載できるように規定が変更されました。F1 の車体は多くの最先端技術の結晶です。しかしその一つひとつの技術に関してあらゆるデータを揃え，シャーシとパワーユニットの完璧なバランスを見つけることができなければ，最速でゴールすることはできません。F1 カーの開発チームは日々研究・改良を繰り返し，技術を研鑽することで，世界最高の車体を作り上げているのです。皆さんも，最先端技術に携わる開発者や技術者のように，チーム一丸となって課題に取り組み，最高のパフォーマンスをみせることができたでしょうか。

本競技で使用した電気二重層コンデンサは，自動車の回生ブレーキシステム，電子機器のバックアップ電源，無停電電源システム，太陽電池パネルと組み合わせたハイブリッド電源システムなど，広範な用途があり，大きな期待が寄せられているエネルギー貯蔵デバイスの一つです。電気二重層コンデンサは，蓄電池(例えば携帯電話などに用いられるリチウムイオン電池)のように電気化学反応を利用しないので，急速な充放電が可能であり，かつ充放電による劣化が少なく，長い製品寿命を持ちます。また，活性炭や有機系電解液が主な構成材料であり，重金属や希少金属を含まないため，廃棄時の回収処理は不要であり，環境にやさしいというメリットも持っています。電気二重層コンデンサは，小惑星探査機「はやぶさ」に搭載されていた探査ローバー「MINERVA（ミネルバ）」にも使用されていました。そして，2014 年 12 月 3 日に H-Ⅱ A ロケット 26 号機で打ち上げに成功した「はやぶさ２」に搭載された「MINERVA-Ⅱ（ミネルバ２）」には，前回使用されたものと同一サイズでありながら蓄電容量を約２倍に向上させ高性能化した電気二重層コンデンサが使用されています*。

今回の競技課題では，斜面を降下するときに回生ブレーキによって運動エネルギーを電気エネルギーに変換し，電気二重層コンデンサに蓄えることができる充電カーと，蓄えた電気エネルギーを再び運動エネルギーとして使用し，速く，そして力強く空中ロープを上昇するロープウェイの２つの機体を製作する必要がありました。それでは，今回の競技課題を解決するために重要ないくつかのポイントを科学的な視点で解説していきましょう。

＊エルナー株式会社（記者発表資料）http://www.elna.co.jp/news/2014/pdf/141203.pdf

モーターのパワーとトルクの関係

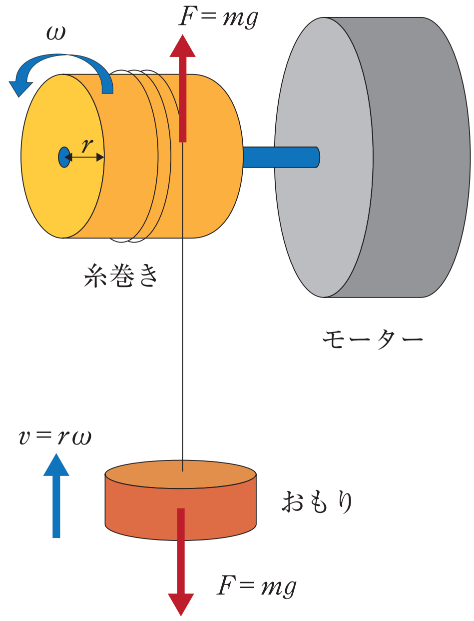

図１　モーターのする仕事

図１のようにモーターに半径 r の糸巻きを取り付け，糸に付けた質量 m のおもりを一定の速さで引っ張り上げる状況を考えてみましょう。モーター(糸巻き)の回転の角速度を ω とすると，おもりが上昇する速さは $v=r\omega$ で与えられます。また，モーターは糸巻きを介しておもりにはたらいている重力と同じ大きさの力 $F=mg$ で糸を持ち上げています。したがって，モーターがなす単位時間当たりの仕事，すなわちパワー P〔W〕は，

$$P=F\times v=F\times r\times\omega$$

で与えられます。この式に出てくる $F\times r$(力×回転軸から力の作用線までの距離)は**トルク**(**力のモーメント**)と呼ばれます。トルクの単位はニュートンメートル(N･m)ですが，グラム重センチメートル(g重･cm もしくは gf･cm)もよく使われます。両者の関係は，おおよそ 1 g重･cm＝9.8×10^{-5} N･m＝0.098 mN･m(mN＝10^{-3} N はミリニュートン)です。トルクを記号 T で表すことにすれば，モーターのパワー P〔W〕は

$$P=T\omega\quad(\text{トルク}\times\text{角速度})$$

と表すことができます。角速度の代わりに１分間当たりの回転数 N(単位は rpm: rotations per minute)を用いるなら，$\omega=2\pi\times\dfrac{N}{60}$ より

$$P=2\pi\frac{TN}{60}\quad(1)$$

と表現できます。

さて，本競技で用いたエコモーターギヤボックスの説明書には，電源電圧が３V のときの実測値として，表１のような値が掲載されています。

表１　３V 電源における出力軸の回転トルクおよび回転数

タイプ	ギヤ比	回転トルク	回転数
A	12.7：1	69.9 gf･cm	394 rpm
B	38.2：1	210.1 gf･cm	131 rpm
C	114.7：1	630.9 gf･cm	44 rpm

ギヤ比とは,「モーター自身の回転数:ギヤボックスの出力軸の回転数」を意味しています。この表は,モーターが最も効率よく動作するときの値を示していますが(付録1参照),式(1)にしたがってギヤボックスの出力軸のパワーを計算してみると,どのギヤ比でも約 0.28 W となることがわかります。これは中学校の理科で習う「仕事の原理」の一例です。ギヤ比が大きければ大きいほど,大きなトルクを生み出すことができますが,その代償として出力軸の単位時間当たりの回転数は小さくなり,ゆっくりとしか物を動かせなくなります。ギヤボックスのギヤ比は状況に応じて適切に選ぶ必要があります。

ロープウェイに最適なギヤ比とプーリーの組み合わせ

本競技で用いるギヤボックスの質量は約 40 g で,このギヤボックスを搭載したロープウェイの機体の質量は,どんなに工夫を凝らしても 50 g を下回ることは難しいでしょう。以下では簡単のため,ロープウェイの機体の質量を 100 g と仮定し,機体にはたらく重力を $0.1\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \fallingdotseq 1\ \mathrm{N}$ として話を進めます。

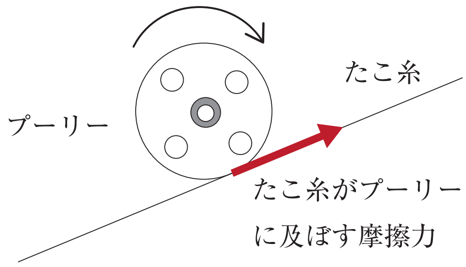

図2　プーリーを用いたロープウェイの上昇

本競技でロープウェイが登るべき空中ロープの平均的な傾斜角度 θ は,$\tan^{-1}(1.5/5) \fallingdotseq 17^\circ$(約 0.3 rad)です。この空中ロープを伝ってロープウェイを上昇させるために必要な力は $1\ \mathrm{N} \times \sin\theta \fallingdotseq 0.3\ \mathrm{N} \fallingdotseq 30\ \mathrm{gf}$ となります。この力をロープウェイに与える方法の一つの例は,図2のようにギヤボックスの出力軸に直接取り付けられているプーリーをたこ糸の上で滑らずに回転させることです(プーリーに輪ゴムを巻いておけば,たこ糸との間に十分な摩擦力が得られます)。このとき,プーリーには回転を妨げる向きに 30 gf の摩擦力がはたらきます。モーターの電源電圧が 3 V でギヤ比がタイプ A(12.7:1)の場合,ギヤボックスの出力トルクは約 70 gf・cm なので,この摩擦力による逆向きのトルクに打ち勝ってプーリーを回転させるためには,プーリーの半径を $70\ \mathrm{gf \cdot cm} \div 30\ \mathrm{gf} \fallingdotseq 2.3\ \mathrm{cm}$ 以下にする必要があります。しかし,プーリーの直径を小さくすると,ロープウェイの上昇スピードは落ちてしまいます。

本競技で用意されたプーリーセットには,直径が 1.1 cm,2.5 cm,5 cm の3種類のプーリーが含まれていました。実際の競技では,ロープウェイが空中ロープを登るにつれて電源(電気二重層コンデンサ)の電圧は減少し,ギヤボックスから得られるトルクも減少していきます。また,空中ロープの傾斜角度は徐々に大きくなり,ゴール付近で最大となります。これらの要因を考慮すれば,電源電圧を 3 V とした場合,ギヤ比はタイプ A,プーリーは直径 2.5 cm を選択するのが適切でしょう。電源電圧が 3 V より低い場合は,より直径の小さいプーリー,もしくはタイプ B(38.2:1)のギヤ比を選択する必要があるでしょう。

充電カーの設計

充電カーの役割は，モーターを発電機として利用して，おもり（ペットボトル）の位置エネルギーを電気エネルギーに変換し，電気二重層コンデンサに蓄えることです。本競技では，ペットボトルの質量は 2 kg 以下，斜面の角度は 30° ～ 45° の範囲という制限がありました。素朴に考えれば，最大の傾斜角度 45° で 2 kg のペットボトルを載せて充電カーを走らせれば，1 回の走行でより多くの電気エネルギーを溜められそうです。しかしながら，斜面の角度が急になればなるほど，充電カーを安定に走行させるのが難しくなることに皆さんも気が付いたことでしょう。その理論的な根拠を以下に解説します。

図 3 のように質量 m のペットボトルを載せた充電カーが重力 $F_G = mg$ を受けて傾斜角 θ の斜面を一定の速さで下っている状況を考えます。ここでは，後輪がギヤボックスにつながれ，斜面から摩擦力 F_1 を受けて滑らずに回転しているとします。前輪と後輪の間隔を L，斜面と平行な方向における前輪と重心の間隔を x，重心と斜面との距離を h，後輪，前輪が斜面から受ける垂直抗力を，それぞれ N_1，N_2 とします。自由に回転できる前輪が斜面から受ける摩擦力は無視します。まず，充電カーが一定の速さで進んでいるという条件から，充電カーにはたらいている力の合力は，斜面に平行な成分に関しても垂直な成分に関してもゼロでなければならないので，

$$\text{（斜面と平行な成分）} \quad mg\sin\theta = F_1 \quad (2)$$

$$\text{（斜面と垂直な成分）} \quad mg\cos\theta = N_1 + N_2 \quad (3)$$

が成り立ちます。また，充電カーがひっくり返らない，つまり回転しないためには，前輪から受ける（車体を時計回りに回そうとする）トルクと，後輪から受ける（車体を反時計回りに回そうとする）トルクが等しくなければなりません。したがって，

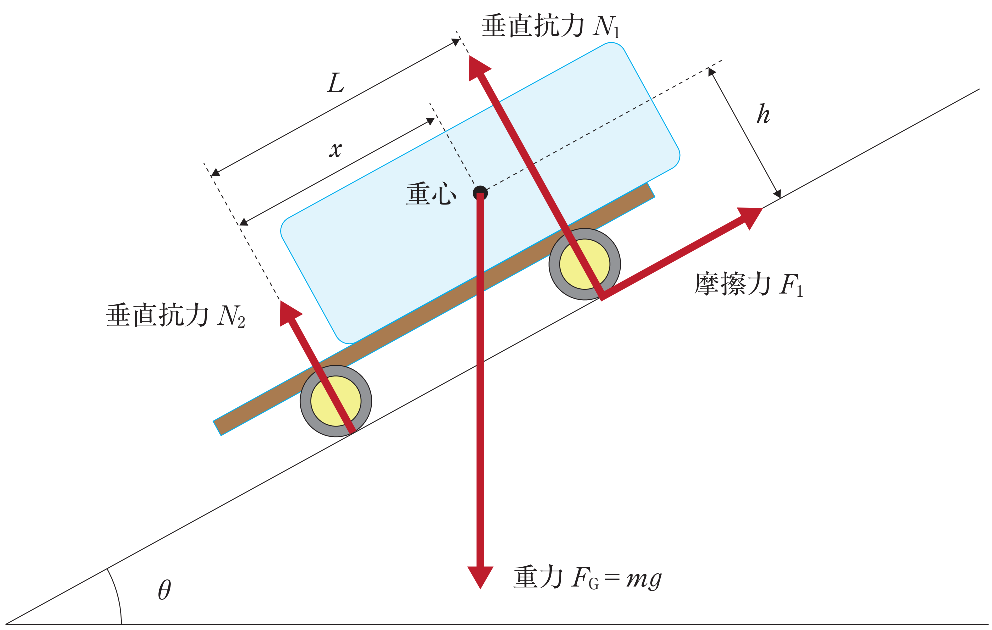

図 3　充電カーにはたらく力。後輪にギヤボックスが付けられている場合について描いてある。

$$xN_2 = (L - x)N_1 + hF_1 \quad (4)$$

が成り立つ必要があります。式(2)〜(4)より，前輪および後輪にはたらく垂直抗力は

$$N_1 = mg\frac{x\cos\theta - h\sin\theta}{L}$$

$$N_2 = mg\frac{(L - x)\cos\theta + h\sin\theta}{L}$$

と求まります。ただし，垂直抗力は負の値をとれないので，$N_1 \geqq 0$，$N_2 \geqq 0$ より x は

$$h\tan\theta \leqq x \leqq h\tan\theta + L \quad (5)$$

を満たす必要があります。式(5)は充電カーがひっくり返らないための条件となります。式(5)は，「ペットボトルの重心の水平位置は，前輪と後輪の間になければならない」ことを意味しており，これは直感的にも理解できるでしょう。しかし，x が式(5)を満たせば問題ないというわけではありません。後輪にはたらいている摩擦力 F_1 は，タイヤと斜面の最大摩擦力 $F_0 = \mu N_1$（μ は静止摩擦係数）以下でなければ，タイヤは滑ってしまいます。したがって，

$$F_1 = mg\sin\theta \leqq F_0 = \mu N_1 = \mu mg\frac{x\cos\theta - h\sin\theta}{L}$$

が成り立っていなくてはなりません。これを x の条件として表してみると，

$$x \geqq \left(\frac{L}{\mu} + h\right)\tan\theta$$

となり，(5)の条件と合わせると

$$\frac{L}{\mu}\tan\theta + h\tan\theta \leqq x \leqq L + h\tan\theta \quad (6)$$

となります。さて，この不等式を満たすような x（重心の位置）は存在するでしょうか。例えば，$\theta = 45°$（$\tan\theta = 1$），$\mu = 1$ を代入してみると，

$$L + h \leqq x \leqq L + h$$

つまり，$x = L + h$（ペットボトルの重心が後輪のちょうど鉛直上方）でなければならないことになります。これは厳しい条件です。このような状況は，前輪にギヤボックスがつながれている場合でも同様に起こります。

斜面に滑り止めマットを敷けば，$\mu > 1$ を実現できるので，$\theta = 45°$ の斜面でも何とか充電カーを安定に走行させることができます。しかし，それでも式(6)の条件を満たすようにペットボトルの重心の位置を調節するのは難しいでしょう。斜面の角度を $\theta = 45°$ より小さくして，式(6)を満たす x の範囲を広くするのも，作戦の一つと言えるでしょう。

充電カーに最適な充電方法

質量 2 kg のペットボトルの重心の位置を調節して，$\theta = 45^\circ$ の斜面上をタイヤが滑ることなく走行させることができる充電カーを作成できたとしましょう。その充電カーのギヤボックスのギヤ比，および電気二重層コンデンサの接続方法はどのように選択すればよいでしょうか。

充電カーが一定の速さで斜面上を走行している場合，ギヤボックスにつながれたタイヤにはたらくトルク T は，タイヤの直径 38 mm（半径 19 mm）および式(2)より，

$$T = mg\sin\theta \times 1.9\ \mathrm{cm} = 2\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1.9\ \mathrm{cm} = 2.7 \times 10^3\ \mathrm{gf \cdot cm}$$

と計算されます。このトルクはギヤボックスのギヤ比の割合だけ小さくなって（タイプ A のギヤ比なら 12.7 分の 1 になって）モーターの車軸に伝わります。詳細は付録 2 で解説していますが，モーターにはたらくトルクが決まると，充電する電気二重層コンデンサの任意の電圧値に対してモーターの回転数や発電効率などが計算できます。表 2 に，電気二重層コンデンサの電圧が 0 V（充電開始時），1.5 V，および 3.0 V における充電カーの諸パラメーターの計算値を示します。

表 2　一定の速さで走行する充電カーの各ギヤ比における諸パラメーターの計算値
（質量 2 kg，傾斜角 $\theta = 45^\circ$ の場合）。上から，コンデンサ電圧が 0 V，1.5 V，3.0 V のときの値。

タイプ	ギヤ比	モーターにはたらくトルク	モーターの回転数	充電カーの速さ	距離 1.8 m の走行時間	効率
A	12.7：1	210 gf･cm	45000 rpm	7.1 m/s	0.25 s	0%
			48000 rpm	7.6 m/s	0.24 s	6%
			51000 rpm	8.1 m/s	0.22 s	12%
B	38.2：1	71 gf･cm	15000 rpm	0.79 m/s	2.3 s	0%
			18000 rpm	0.95 m/s	1.9 s	16%
			21000 rpm	1.1 m/s	1.6 s	28%
C	114.7：1	23 gf･cm	4800 rpm	0.084 m/s	22 s	0%
			7900 rpm	0.14 m/s	13 s	37%
			11000 rpm	0.19 m/s	9.5 s	53%

表 2 の値は充電カーの速さが一定であると仮定したときの値です。タイプ A のギヤ比で充電カーが持つ運動エネルギー（おおよそ 50 J ～ 65 J）は，質量 2 kg で高さ 1.3 m の位置にある充電カーが持っていた重力のポテンシャルエネルギー（約 25 J）より大きいことがわかります。これは，実際には充電カーは一定の速度に到達することはなく，重力のポテンシャルエネルギーのほとんどを充電カーの運動エネルギーに使ってしまうことを意味します。したがって，タイプ A のギヤ比の選択は，まずあり得ません。

タイプＢとタイプＣのギヤ比ではどうでしょうか。どちらのギヤ比でも，一定の速さで走行している充電カーの運動エネルギーは，重力のポテンシャルエネルギーに比べて十分小さくなっています。したがって，充電カーは斜面上で速やかに一定の速さに到達すると考えられ，重力のポテンシャルエネルギーから充電カーの運動エネルギーへのエネルギー変換の効果は無視してもよいでしょう。

タイプＣのギヤ比におけるエネルギー変換効率は，タイプＢの２倍程度あります。したがって，タイプＣのギヤ比がベストな選択なように見えます。しかしながら，本競技はタイムレースであり，エネルギー変換効率を犠牲にしても，短時間に電気二重層コンデンサを所望の電圧まで充電できた方が有利です。電気二重層コンデンサを充電する際の電力を両者で比較すると，タイプＢはタイプＣの約３倍です。したがって，意外なことに，タイムレースという本競技のルールの下では，タイプＢのギヤ比がベストな選択となります。

では，電気二重層コンデンサ(1個当たりの容量 3.3 F)をどのように接続して充電するのがベストでしょうか。ロープウェイの解説で示したように，3 V の電源電圧があればロープウェイを登らせるのに十分なトルクが得られるので，この電圧を実現することを目標にしましょう。考えられる充電方法は，

① 2つのコンデンサを直列につないで(合成容量 1.65 F)3 V まで充電する
② 2つのコンデンサを並列につないで(合成容量 6.6 F)1.5 V まで充電し，その後，直列につなぐ
③ 2つのコンデンサを1つずつ(各 3.3 F)1.5 V まで充電し，その後，直列につなぐ
④ 1つのコンデンサ(3.3 F)を 3 V まで充電する

などです(本競技で用いたコンデンサの定格電圧は 2.5 V なので，④の方法は仮想上のものです)。付録2で解説しているように，発電機としてはたらいているモーターは定電流電源とみなせ，タイプＢのギヤ比（モーターにはたらくトルクが 71 gf･cm）の場合，図9より約 1.5 A の電流でコンデンサが充電されることがわかります。コンデンサの(合成)容量を C，充電時間を $\varDelta t$，コンデンサに溜まった電荷を Q とすると，$Q=CV$ より，

$$I=\frac{Q}{\varDelta t}=C\frac{V}{\varDelta t}=1.5\ \mathrm{A}\quad \text{つまり}\ \varDelta t=C\frac{V}{1.5\ \mathrm{A}}$$

が成り立ちます。この式より，①～④の方法について充電時間を計算してみると，①のみ 3.3 秒で，残りの②～④はすべてその倍の 6.6 秒になります。①の直列接続の場合が最も短い時間で所望の電圧を実現することができるのです。直列接続にすると容量は小さくなりますが，3 V まで充電された直列接続されたコンデンサの静電エネルギーは，

$$U=\frac{1}{2}CV^2=7.4\ \mathrm{J}$$

であり，ロープウェイをゴールさせるために必要な力学的エネルギー(ロープウェイの質量を 100 g とすれば，約 1.5 J)を大きく上回っています。直列接続による容量の低下に不安が

あるならば，1つのコンデンサを定格の2.5 V近くまで充電するのも作戦の一つです。モーターの最適な出力パワーは電圧の2乗にほぼ比例するので(付録1)，電圧を2.5 Vにすると，直列接続で3.0 Vを実現した場合に比べて最適な出力パワーは30％程度落ちてしまいますが，容量は倍になり，静電エネルギーも35％程度大きくなります。また，3個のコンデンサを直列接続して，3 Vよりも高い電圧まで充電するのも有効な作戦の一つでしょう。

いかがでしょうか。以上のような科学的な視点による考察は，機体設計の有効な指針となるでしょう。しかし，どのような科学的な考察も，現実のすべての要素を取り入れることは難しく，ある程度の近似，状況の単純化，理想化を前提とします。科学的に導かれた結論であっても，常に不確かさが付きまとうことを忘れてはなりません。現実の機体で最適な解を見つけるには，やはり数多くの試行・試作や実験を重ねるしかありません。研究・改良を繰り返し，設計・製作に必要なあらゆるデータを揃え，それを基に機体を製作したチームほど，レースで好成績を修めたことと思います。

競技は終了しましたが，この解説を参考にして，学校でもう一度，今回の優勝タイムを上回る記録を出せるかどうかチャレンジしてみてください。“失敗は成功のもと”です。今，失敗から学ぶチャンスです。

皆さんの今後の人生でも，誰も解答を知らない問題が待ち受けています。今回の競技の経験を生かして，皆で知恵を出し合い，“トライアル＆エラー”を繰り返すことを厭わずに問題に立ち向かって下さい。

付録１．直流モーターの動作原理と諸特性

図４に示すように磁石，コイル，および整流子からなる直流モーターが角速度 ω で回転している状況を考えます。コイルに電流 I が流れているとき，回転軸からの距離 R，長さ L の導線部分が受ける力は，磁石がつくる磁束密度の大きさを B として $F=IBL$ となります。したがって，このモーターが生み出しているトルクの大きさ T は，図４に示すコイルの回転位置では $T=2\times R\times IBL=SBI$ と表されます。ここで，$S\equiv 2RL$ はコイルの囲む面積です。このように，モーターが発生するトルクはコイルに流れる電流に比例し，その比例定数 $k_T=BS$ は**トルク定数**と呼ばれています。

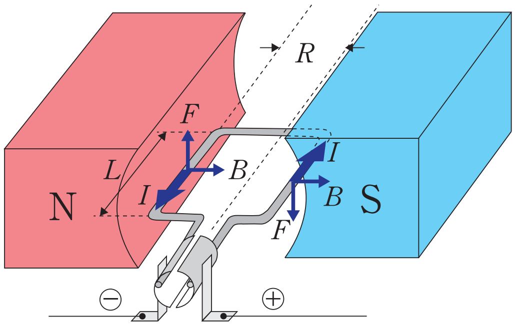

図４　整流子を持つ直流モーター

$$T=k_TI \quad (7)$$

一方，このコイルに生じている逆起電力 V_R は，コイルを貫く磁束の単位時間当たりの変化量に等しいので $V_R=BS\omega$ と表されます。このように，コイルに生じる逆起電力はコイルの回転の角速度に比例し，その比例定数 $k_E=BS$ は**逆起電力定数**と呼ばれています。

$$V_R=k_E\omega \quad (8)$$

面白いことに，トルク定数と逆起電力定数は等しくなっています。

$$k_T=k_E \quad (9)$$

このことは，より大きなトルクを生み出せるモーターは，より大きな電圧を生み出せる発電機でもあることを示唆しています。モーターに生じるトルクが外部にする仕事率 P は $T\omega$ で表されるので，式(7)〜(9)より

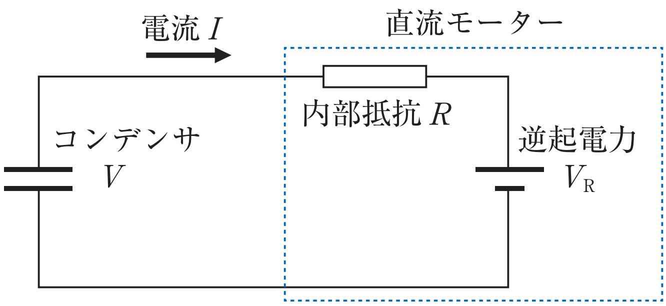

図５　定常的な回転をしているときの直流モーターの等価回路

$$P=T\omega=k_TI\times\frac{V_R}{k_E}=\frac{k_T}{k_E}IV_R=IV_R$$

が成り立ちます。IV_R は，モーターのコイルに生じる逆起電力に逆らって電流を流し続けているときの電源の電力そのものですから，式(9)は，電気エネルギーから力学的エネルギーへの変換がエネルギー保存則にしたがっていることを表しています。つまり式(9)の関係は，一般のモーターにも成り立つ普遍的な関係式なのです。したがって，以下では $k_E=k_T=k$ と表すことにします。

式(7)，(8)で表されるトルクと逆起電力は，図４に示したコイルの回転位置での値であり，実際には時間的に変動します。しかし，現実の直流モーターではトルクと逆起電力が時間的にあまり変動しないようにコイルの巻き方を工夫しています。したがって，以下の議論では，角速度 ω で回転している直流モーターは，式(7)，(8)で表されるトルクと逆起電力を常に発

生すると仮定します。

　直流モーターが電圧 V のコンデンサを電源として一定の角速度 ω で回転している状況を考えましょう。このときのモーターの等価回路を図 5 に示します。モーターのコイルが持つ抵抗および整流子の接触抵抗をまとめて内部抵抗 R と表すことにします。この回路に流れる電流 I は，式(7)によるとトルクに比例します。ここで注意が必要です。式(7)を導出した際，T はコイルに生じるトルクの大きさを表していましたが，モーターの軸が回転する際に生じる摩擦力などの影響でモーターには逆向きのトルク T_0 も発生しています。外部に取り出せるトルクを改めて T と表すことにすれば，

$$T = kI - T_0 \quad (10)$$

と表せるでしょう。これを I について解くと

$$I = \frac{T + T_0}{k} = \frac{T}{k} + I_0 \quad (11)$$

となります。ここで，$I_0 = \dfrac{T_0}{k}$ は**無負荷電流**と呼ばれる量で，モーターの軸に何もつながない無負荷の状態（$T=0$）でモーターを回転させるために必要な電流を表します。

　さて，キルヒホッフの法則より，

$$V - RI = V_R \quad (12)$$

が成り立ちます。式(8)および式(11)を用いて，式(12)から I と V_R を消去すると，

$$\omega = \frac{V - RI_0}{k} - \frac{R}{k^2}T \quad (13)$$

というトルクと角速度の関係式が得られます。特に，無負荷時の角速度 ω_0 は，

$$\omega_0 = \frac{V - RI_0}{k} \quad (14)$$

と表せます。図 6 に本競技で用いたギヤボックスに付属のエコモーター（RC300-FT，端子間抵抗の実測値 $R = 5\ \Omega$）の無負荷時の回転数および無負荷電流の実測値を示します。これらの実測値および式(14)より，逆起電力定数（トルク定数）k の値は約 0.0046 Vs/rad と計算されます。図 6 に示すように，無負荷電流 I_0 は一定ではなく，回転数とともに増加していき

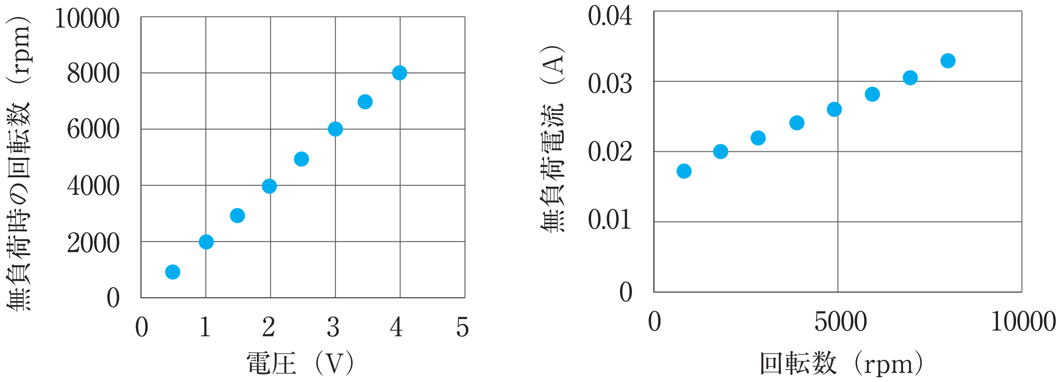

図 6　エコモーター（RC300-FT）の無負荷時の回転数と無負荷電流の実測値

ますが，以下では，断りがない限り I_0 を近似的に一定とみなして話を進めます。

電源がモーターに注入している電気的なパワーは $P_{in} = VI$ であり，モーターが車軸を通して外部になす力学的なパワーは $P_{out} = T\omega$ です。したがって，モーターのエネルギー変換効率(以下，単に効率と呼びます) η は,

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T\omega}{VI} = \frac{T\left(\dfrac{V-RI_0}{k} - \dfrac{R}{k^2}T\right)}{V\left(\dfrac{T}{k} + I_0\right)} \quad (15)$$

と表せます。これは一見複雑な式ですが，モーターを流れる電流が無負荷電流に比べて十分大きく，無負荷電流の効果が無視できる場合($I_0 = 0$),

$$\eta = 1 - \frac{RT}{kV} = \frac{V-RI}{V} \quad (16)$$

と極めて単純な式に帰着します。この式の意味するところは，モーターの内部抵抗における電圧降下(ジュール熱の発生)が効率を下げる原因であるということです。無負荷電流の効果が無視できるなら，電流がゼロ，したがってトルクがゼロの極限で最大(100%)の効率が得られることになりますが，実際は無負荷電流の影響のため，ある特定のトルクで効率が最大になります。

図 6 のデータを元に計算されたエコモーター(RC300-FT)の諸特性を図 7 に示します(I_0

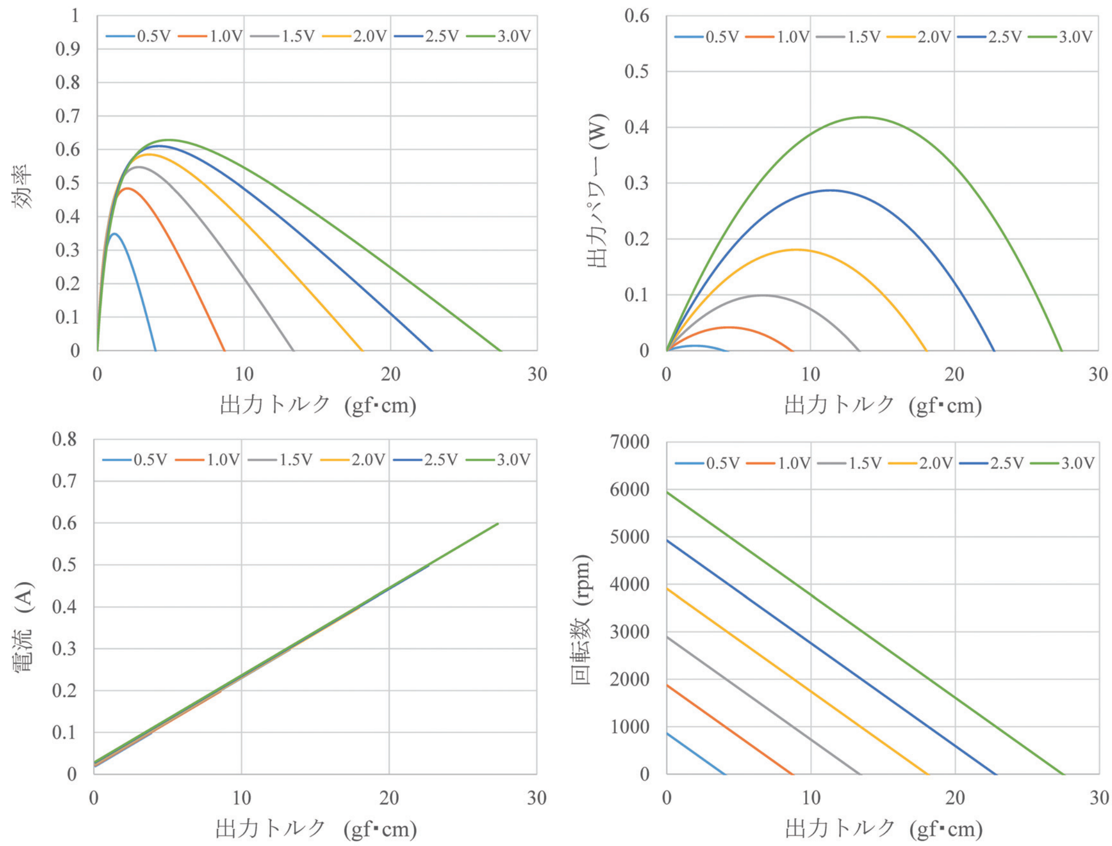

図 7　エコモーター(RC300-FT)の諸特性(計算値)

の回転数依存性も考慮されています）。効率を最大にするトルクは，出力パワーを最大にするトルクよりも常に小さいため，モーターの出力パワーを最大にしたければ，効率を犠牲にしなければなりません。効率を最大にするトルクおよび効率の最大値は電源電圧とともに増加し，効率が最大時の出力パワーは，電源電圧の２乗にほぼ比例しています。

付録２．発電機としての直流モーターの諸特性

　次に，モーターを発電機として利用する状況を考えてみましょう。モーターには外部からトルク T が加えられ，モーターとして動作しているときと同じ向きに角速度 ω で回転しているものとします。このとき，モーターに生じる逆起電力 V_R は，式(8)と同様に

$$V_R = k\omega \quad (17)$$

と表せます。この誘導起電力が外部につながれたコンデンサの電圧 V より高ければ，図８に示す向きに電流が流れてコンデンサが充電されます。この電流の向きは，モーターとして動作している場合とは逆向きなので，モーター内のコイルには回転を妨げる向きに

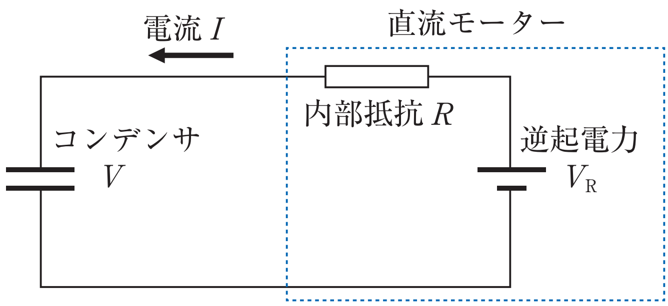

図８　モーターが発電機として動作しているときの等価回路。電流の向きは，モーターとして動作しているときと逆になる。

$$T_R = kI \quad (18)$$

のトルクがはたらきます。さらに，式(10)で考慮したように，モーターの回転に伴う摩擦力などの影響で，モーターには回転を妨げる向きのトルク T_0 もはたらきます。モーターが一定の角速度で回転している状況では，回転を駆動する外部からのトルクと，回転を妨げるトルクがつり合っているので，

$$T = T_R + T_0 = kI + T_0 = k(I + I_0) \quad (19)$$

が成り立ちます。ここで $I_0 = \dfrac{T_0}{k}$ は，式(11)で登場した無負荷電流そのものです。これを I について解くと，

$$I = \frac{T}{k} - I_0 \quad (20)$$

となります。モーターの場合の式(11)との符号の違いに注意してください。また，キルヒホッフの法則より得られる式

$$V_R - RI = V \quad (21)$$

もモーターの場合の式(12)と異なっています。式(17)および式(20)を用いて，式(21)から I と V_R を消去すると，

$$\omega=\frac{V-RI_0}{k}+\frac{R}{k^2}T \quad (22)$$

というトルクと角速度の関係式が得られます。外部からのトルクがモーターになす仕事率は $P_{\mathrm{in}}=T\omega$，コンデンサに蓄えられる電力は $P_{\mathrm{out}}=IV$ なので，この発電機のエネルギー変換効率 η は，

$$\eta=\frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}}=\frac{VI}{T\omega}=\frac{V\left(\dfrac{T}{k}-I_0\right)}{T\left(\dfrac{V-RI_0}{k}+\dfrac{R}{k^2}T\right)} \quad (23)$$

と表されます。この効率のトルク依存性を定性的に理解するために，無負荷電流がゼロ（$I_0=0$），つまりモーター内部でのエネルギー損失のない理想的な発電機を考えてみることにしましょう。このときの効率は，

$$\eta=\frac{V}{V+\dfrac{R}{k}T}=\frac{V}{V+RI} \quad (24)$$

と簡単に表せます。モーターの場合の効率を表す式(16)と形は違いますが，$T\rightarrow 0\,(I\rightarrow 0)$ の極限で効率が 100％になり，$T(I)$ を大きくすると単調に減少するという性質は共通しています。また，内部抵抗における電圧降下 RI がコンデンサの電圧 V に等しいときに効率が 50% になることもわかります。

図 9 にエコモーター（RC300-FT）を発電機として用いた場合の諸特性の計算値を示します（I_0 の回転数依存性も考慮されています）。効率が特定のトルクで最大値をとる傾向は，モーターとして動作させた場合と同様です。しかし，出力パワー，電流，回転数が単調に増加し，上限がない点がモーターの場合と大きく異なっています（実際には，トルクをかけ過ぎるとジュール熱や摩擦熱によってモーターが損傷するので，適切なトルクの範囲が存在します）。また，一定のトルクで発電する場合，充電するコンデンサの電圧が高ければ高いほど効率が高くなることも注目すべき特徴です。充電開始時のコンデンサの電圧はゼロですから，どうしても充電初期の効率は悪くなります。このことは，図 9 に示すように，発電機に加えるトルクが一定の場合，コンデンサに流れ込む電流はコンデンサの電圧に依らずほぼ一定である，つまり発電機が定電流電源としてはたらいていることに注目すれば容易に理解できます。電流 I が一定なら，単位時間にコンデンサに蓄えられる電気エネルギー $P=VI$ はコンデンサの電圧 V に比例するのです。

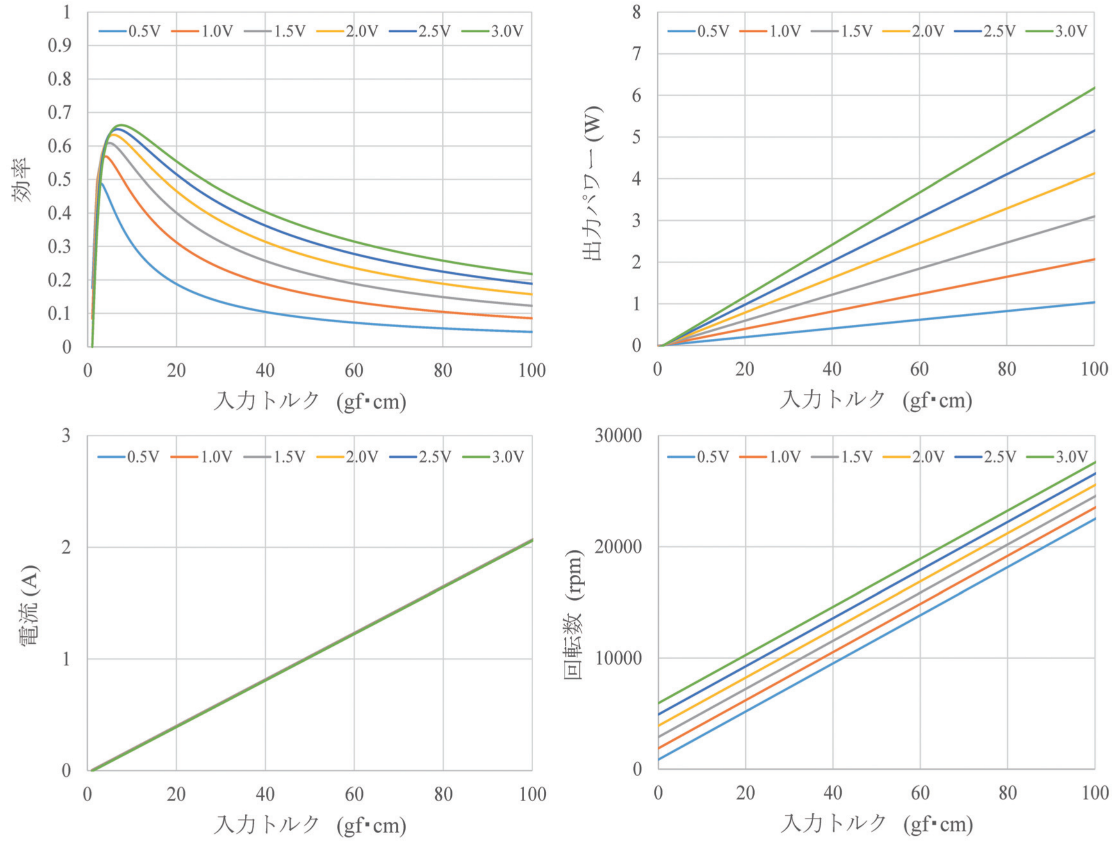

図 9　発電機としてのエコモーター（RC300-FT）の諸特性（計算値）