第１回
科学の甲子園 全国大会

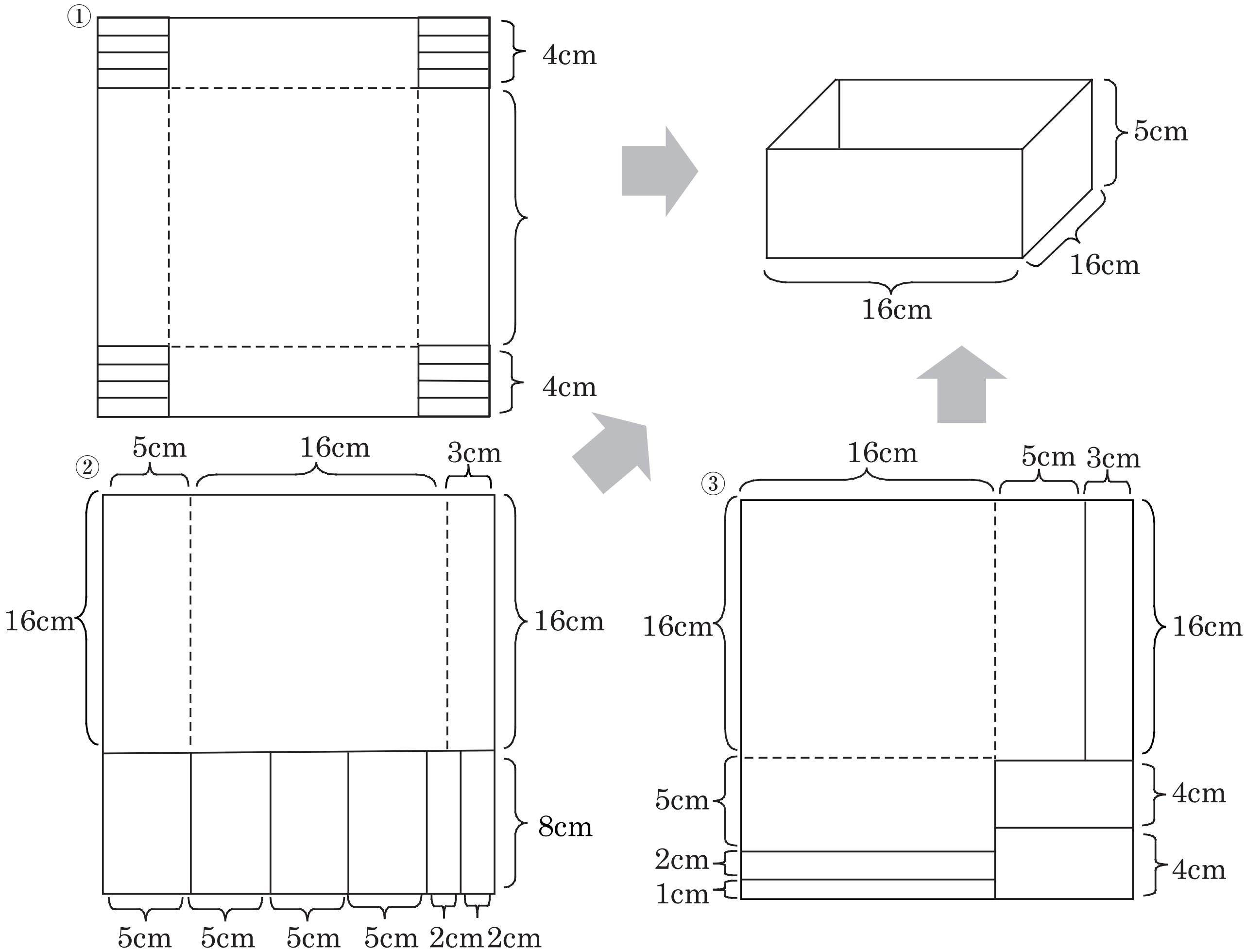
総合競技 ①

⌘ 解説 ⌘

【解説】

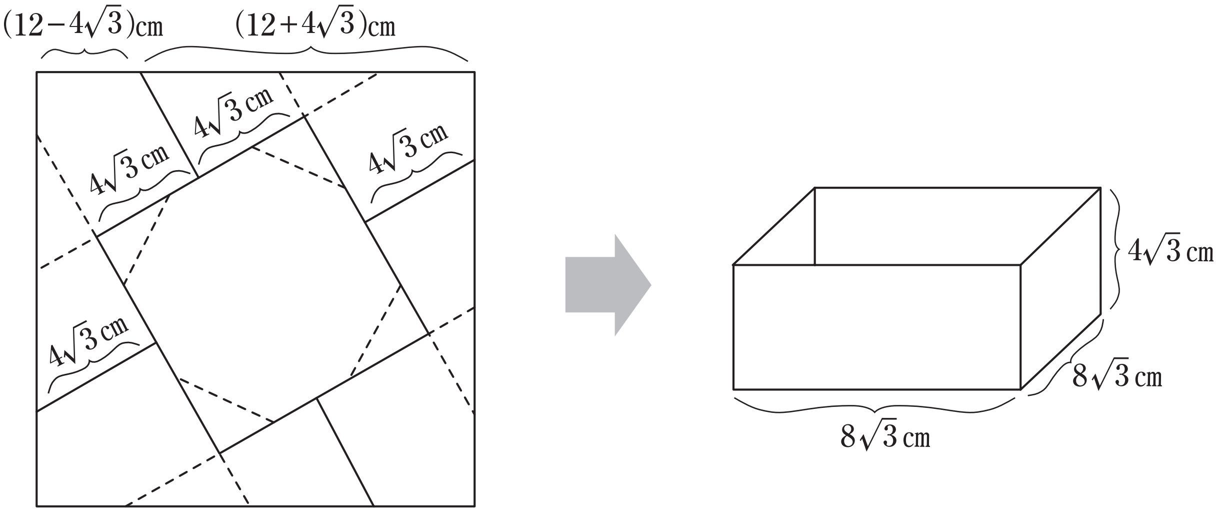
　まず，容器を直方体の形に限って考えてみることにしよう。
単純に四隅から正方形を切り取り，折り曲げて直方体の箱を作る問題は，高等学校の教科書にも出てくる有名な微分の問題である。この場合，容積が最大になるのは（底面の正方形の１辺）：（高さ）＝４：１のときである。24cm × 24cm のシートでは，底面の正方形の１辺が 16cm，高さが 4cm のとき最大になり，最大容積は 1024.0cm^3 となる。
　ただ，この方法だと四隅の正方形４枚が無駄になってしまう。そこで，これを再利用することにし，図１のように容器の口の部分に付け足して高さを１cm 高くすると，その容積は 1280.0cm^3 となる。

図１　四隅から正方形を切り取って作り，残りを継ぎ足した直方体



　しかし，この立体は直方体の形状をした容器の中で最大のものではない。容積が最大となる直方体の形状は底面が正方形で，（底面の正方形の１辺）：（高さ）＝２：１のときである。24cm × 24cm のシートでは，底面の正方形の１辺が $8\sqrt{3}$ cm，高さが $4\sqrt{3}$ cm のとき，最大容積は $768\sqrt{3}$ cm^3 で約 1330.2cm^3 となる。ただし，展開図の作成についてはかなりの工夫が必要である。例えば，図２のような展開図が考えられる。

図２　直方体で容積最大



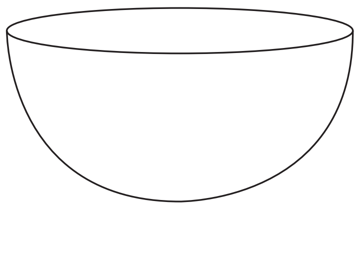
実は，角柱については上記の四角柱から五角柱，六角柱，…になるにつれて容積は増え，「柱」では円柱の容積が最大となる。そして，円柱の形状では（底面の円の直径）:（高さ）＝２:１のとき容積が最大となり，24cm × 24cm のシートで，容積は約 1501.0cm^3 となる。

では，「錐」ではどうなるだろう。四角錐を逆さにした形状では，（正方形の１辺）:（高さ）＝ $\sqrt{2}$:１のとき最大となる。24cm × 24cm のシートで，容積は約 1429.4cm^3 となる。「柱」と同様，四角錐，五角錐，六角錐，…になるにつれて容積は増え，「錐」では円錐が最大となる。

そして，円錐を逆さにした形状では，（円の直径）:（高さ）＝ $\sqrt{2}$:１のとき最大となり，24cm × 24cm のシートで，容積は約 1612.9 cm^3 となる。

さて，立体の形状を限定しない場合，理論上，表面積を固定したときの最大容積の立体は半球になる。この問題では，半径 $\sqrt{\dfrac{288}{\pi}}$ cmの半球であり，その容積は $\dfrac{2}{3}\pi\left(\sqrt{\dfrac{288}{\pi}}\right)^3$cm^3 で約 1838.3cm^3 となる。ところが，実際には半球を平面のシートで作成することは不可能なので，できるだけ半球に近い多面体を考えることになる。例えば，図３～図７などがその例である。

参考　半球が理論上の最大（実際の作成は不可能）



半球の半径を r とすると表面積 $S=2\pi r^2$，体積 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$

ここで $S=$ 24cm × 24cm とすると

$$r=\sqrt{\frac{288}{\pi}}\text{cm}\ ,\ V=\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{288}{\pi}}\right)^3 \fallingdotseq 1838.3\text{cm}^3$$

したがって，このとき，その容積は約 1838.3 cm^3 である。

図 3　六角錐の一例

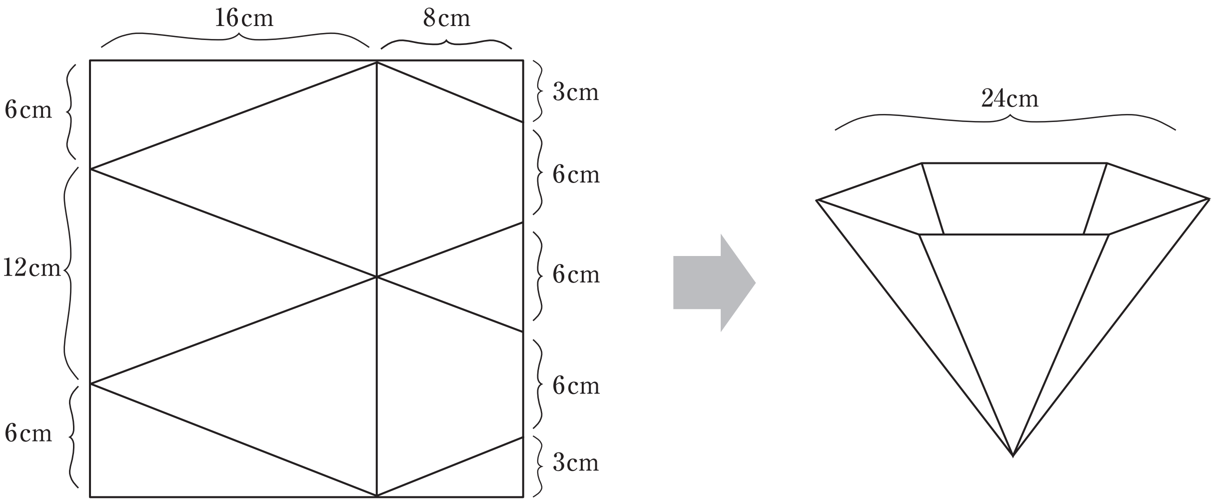


図 4　四角錐台の一例

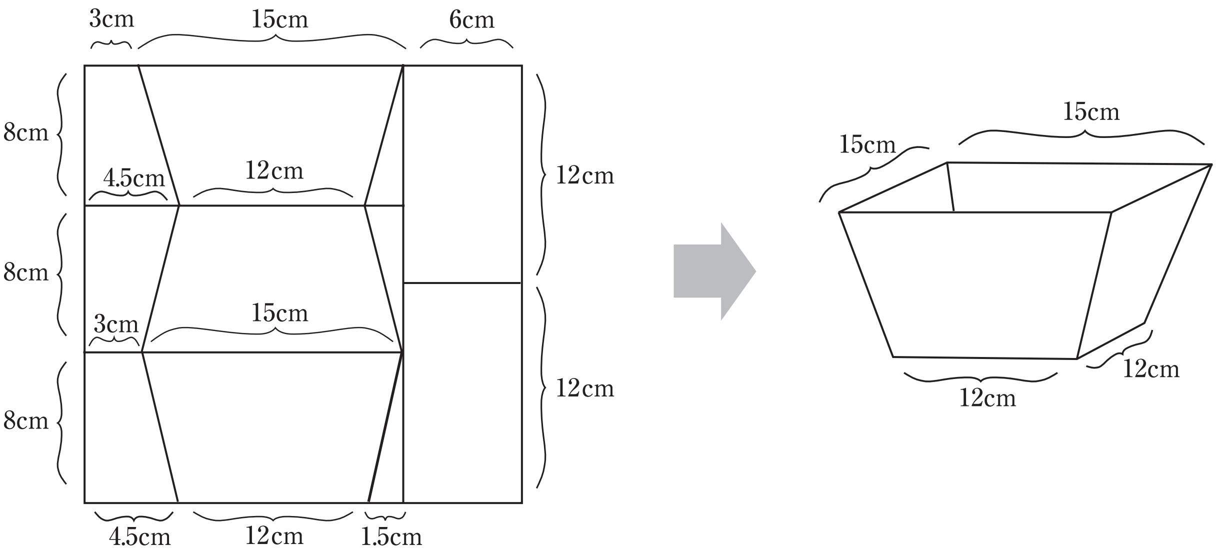


図 5　六角錐柱の一例

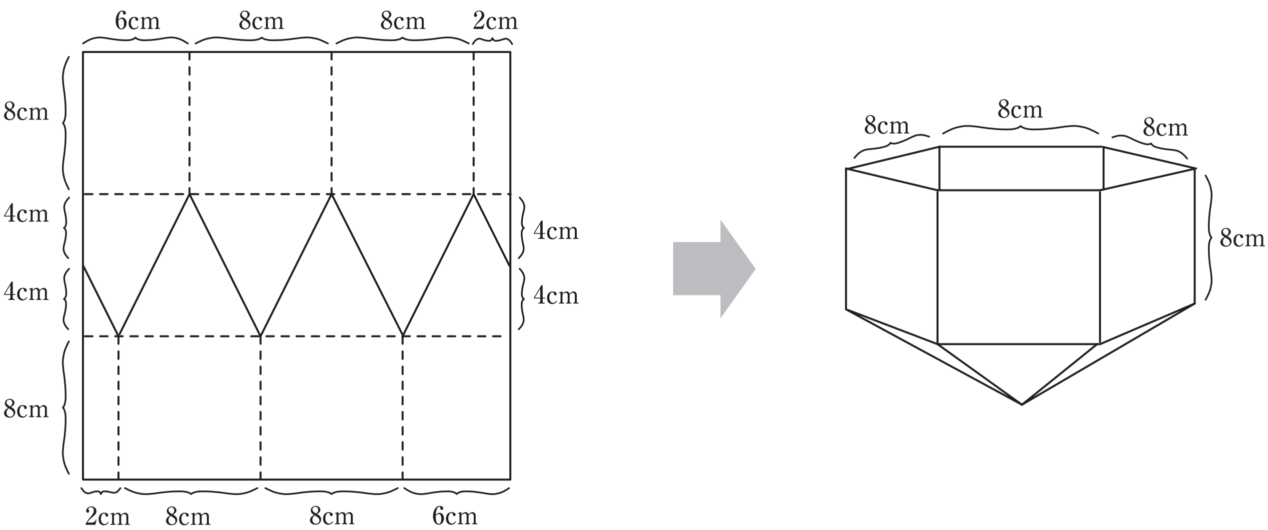


図 6　五角錐半柱の一例

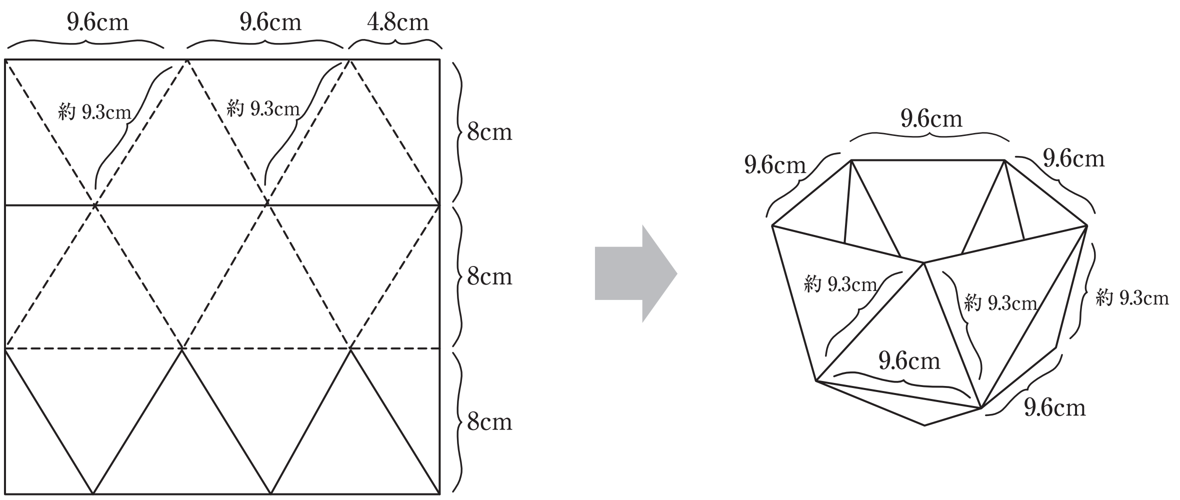
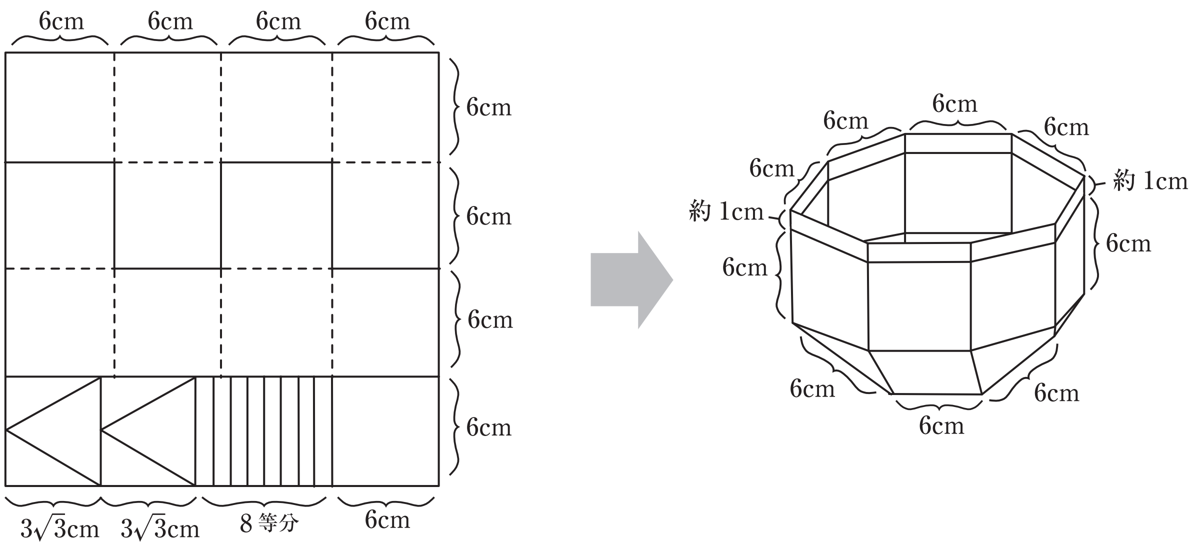


図 7　四角台塔柱の一例



　このように，この問題を純粋に数学の問題として捉えると「半球にできるだけ近い多面体容器を作成すること」となる。しかし，限られた時間内で，しかも，段ボール紙を材料として面と面の間に隙間を作らないように正確に製作するためには，容器の面数もある程度，制約する必要がある。そして，与えられたシートをすべて使用する必要はないが，同じ形状の立体であれば，シートをできるだけ無駄なく使ったほうが容積は増える。ただし，このとき，開口部が平面でなければならないので，展開図を作成するにはさらなる工夫と計画性が必要となる。

　また，同じ立体でもさまざまな展開図が考えられる。例えば図 1 の①②③である。ピース数は，①が 17 ピース，②が 7 ピース，③が 6 ピースである。

　実際の製品設計の現場でも，部品の点数や加工回数を減らすことで，安くて良質な製品を開発する努力が行われている。この競技においても，できるだけピース数の少ない展開図を考えて設計してみたい。