第３回
科学の甲子園ジュニア 全国大会

実技競技①「論理回路」

⌘ 解答例と解説 ⌘

問1

入力 1 a	入力 2 b	入力 3 c	出力 1 x	出力 2 y	出力 3 z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

問２

(1)

論理式（例）

$$x = abc = \overline{\overline{abc}}$$

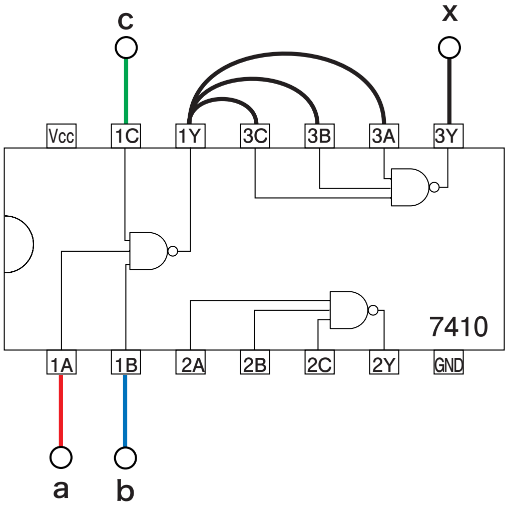
[解説]

$$x = abc$$

ド・モルガンの法則より，すべてを論理積と否定，あるいは同じ項の NAND は否定となることを利用すると，すべてを NAND で表すことができる。

$$x = \overline{\overline{abc}}$$

接続図（例）



(2)

論理式（例）

$$y=\bar{b}c+b\bar{c}=\overline{\overline{b(\overline{bc})}\cdot\overline{c(\overline{bc})}}$$

[解説]

$$y=\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}b\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c}$$

計算の順番をかえると次のようになる。（交換法則）

$$y=(\bar{a}\bar{b}c+a\bar{b}c)+(\bar{a}b\bar{c}+ab\bar{c})$$

それぞれのかっこでくくられた部分に，同じ項があるので，次のようにまとめる。（分配法則）

$$y=(\bar{a}+a)\bar{b}c+(\bar{a}+a)b\bar{c}$$

ある項とその項の否定の論理和は1になることを利用すると次のようになる。（補元法則）

$$y=\bar{b}c+b\bar{c}$$

ある項とその項の否定の論理積は0になることを利用すると次のようになる。（補元法則）

$$y=b\bar{b}+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{c}$$

b および c でくくると，次のようになる。

$$y=b(\bar{b}+\bar{c})+c(\bar{b}+\bar{c})$$

ド・モルガンの法則より次のようになる。

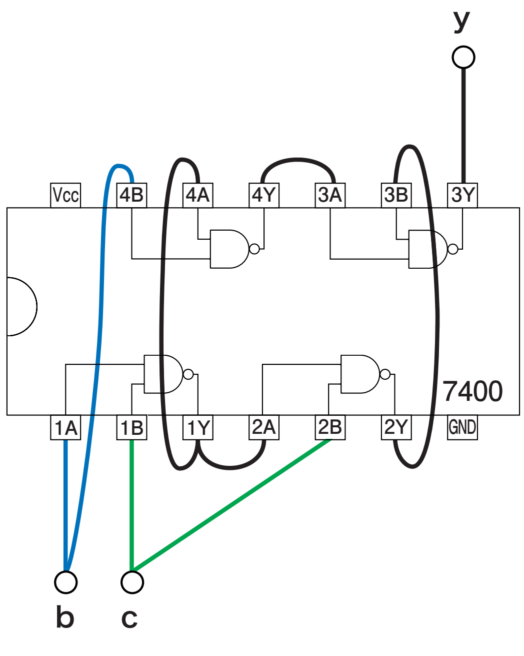
$$y=b(\overline{bc})+c(\overline{bc})$$

さらに，ド・モルガンの法則により，すべてをNANDで表すことができる。

$$y=\overline{\overline{b(\overline{bc})}\cdot\overline{c(\overline{bc})}}$$

ここで，$\overline{bc}$ の項が2回出てくるが，回路としては分岐すればよいことに注意すると，4つの2入力NANDを用いて回路を実現することができる。

接続図（例）



(3)

論理式（例）

$$z=\bar{a}bc+a\bar{b}+a\bar{c}=\bar{a}bc+a\overline{bc}=\overline{\overline{\bar{a}\cdot\overline{\overline{bc}}}\cdot\overline{a\cdot\overline{bc}}}$$

[解説]

$$z=\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c}$$

上の式は，項が論理和でつながれた形になっている。論理和では，同じ項をいくつつなげても結果は同じなので，次のように変形できる。（べき等法則）

$$z=\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c}$$

また，計算の順番をかえると次のようになる。（交換法則）

$$z=\bar{a}bc+(a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c)+(a\bar{b}\bar{c}+ab\bar{c})$$

さらに，それぞれのかっこでくくられた部分に，同じ項があるので，次のようにまとめる。（分配法則）

$$z=\bar{a}bc+a\bar{b}(c+\bar{c})+a\bar{c}(\bar{b}+b)$$

ある項とその項の否定の論理和は1になることを利用すると，次のようになる。（補元法則）

$$z=\bar{a}bc+a\bar{b}+a\bar{c}$$

後ろの2つの項をまとめると，次のようになる。

$$z=\bar{a}bc+a(\bar{b}+\bar{c})$$

ド・モルガンの法則より，次のようにかっこの中をNANDに変形できる。

$$z=\bar{a}bc+a\overline{bc}$$

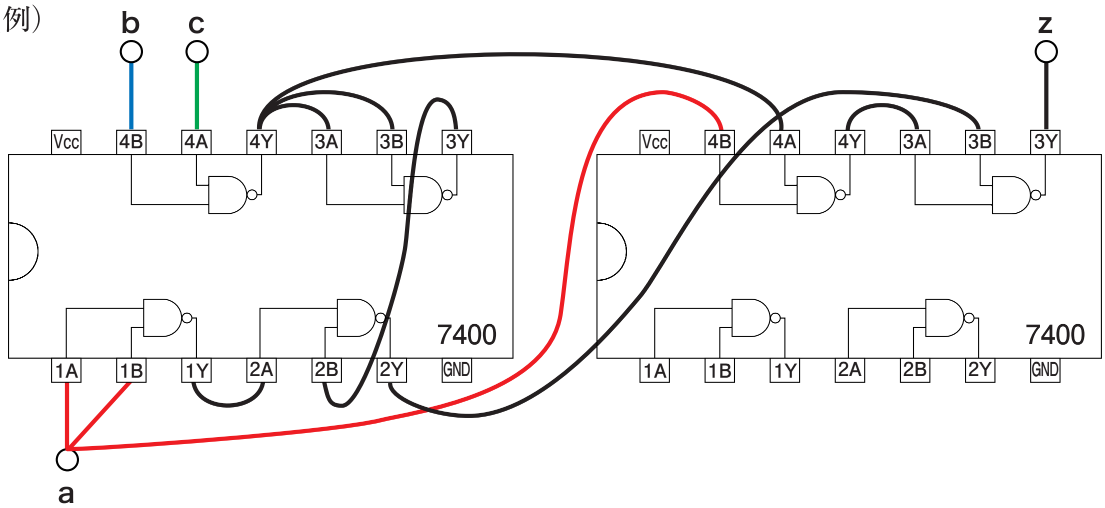
また，否定の否定は元に戻るため，次のように変形できる。

$$z=\bar{a}\overline{\overline{bc}}+a\overline{bc}$$

さらに，ド・モルガンの法則を適用すると，すべてをNANDで表すことができる。

$$z=\overline{\overline{\bar{a}\cdot\overline{\overline{bc}}}+\overline{a\cdot\overline{bc}}}$$

接続図（例）



【解説】

コンピュータの基本は，ここで示したような AND，OR，NOT，NAND，NOR などの論理演算子である。ビットを使った演算はすべてこのような論理演算子を使って行われる。

論理回路には，入力によってのみ出力が決まる「組み合わせ回路」と，状態を記憶する回路を使う「順序回路」の２種類がある。今回出題したものは前者である。

さて，今回の出題について具体的に見てみよう。問1で出題された回路の真理値表は次の通りであった。

a	b	c	x	y	z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

この表から何か気づかないだろうか。わからない？ では，y の列と z の列を入れ替え，さらに b と c の間に線を入れ，次のようにしてみたらどうだろう。

a	b	c	x	z	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

まだわからない？ では，次のようにしてみたらどうだろう。

a	b		c		x	z	y
0	0	+	0	=	0	0	0
0	0	+	1	=	0	0	1
0	1	+	0	=	0	0	1
0	1	+	1	=	0	1	0
1	0	+	0	=	0	1	0
1	0	+	1	=	0	1	1
1	1	+	0	=	0	1	1
1	1	+	1	=	1	0	0

もはや答えである。ここで，二進法の 00 は十進法で 0，二進法の 01 は十進法で 1，二進法の 10 は十進法で 2，二進法の 11 は十進法で 3，二進法の 100 は十進法で 4 である。そう，本問題は，実は 2 ビットの数と 1 ビットの数の足し算をする回路を作成する問題だったのである。この問題で配られた未知の IC は，実は 74283 という型番の 4 ビット全加算器であり，その一部を使って本問題は構成されていたのだ。

この問題のように，論理演算子を使って足し算を行う計算回路を作成することができる。もちろん引き算や掛け算も実現可能である。割り算は少し難しいかもしれないが，不可能ではない。コンピュータが 0 と 1 だけで，どうやって計算をしているかということを，本問題から理解してもらえただろうか。順序回路を使うことによってさらに複雑なことも可能となるので，いろいろ楽しんで欲しい。