



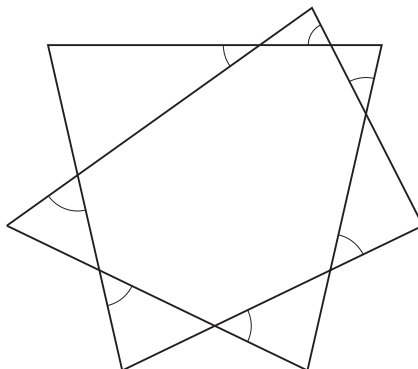
第1回 科学の甲子園 ジュニア

筆記競技

解答例と解説



問1



上図の印をつけた外角の和 $= 360^\circ$ よって
求める角度の和 $= 180^\circ \times \text{三角形の数} - 360^\circ \times 2$
 $= 180^\circ \times 7 - 720^\circ = 540^\circ$
(他にもいろいろな求め方がある)

問2

- (1) 一般の m, n に対して $f(m, n) = m + 2n - 2$ である。
角度で考えると, n 個の点のまわりの角度の和は $n \times 360^\circ$
中学教科書より, 正 m 角形の内角の和は $m \times 180^\circ - 360^\circ$
すると一つの三角形の内角の和 $= 180^\circ$ より
$$f(m, n) \times 180^\circ = n \times 360^\circ + m \times 180^\circ - 360^\circ$$
$$\therefore f(m, n) = m + 2n - 2$$
$$\therefore f(2013, 12) = 2013 + 2 \times 12 - 2 = 2035$$

(2) 三角形の辺のうち, 正 m 角形の辺以外は重なっているので,
$$2(g(m, n) - m) + m = 3f(m, n)$$
$$\therefore 2g(m, n) = 3f(m, n) + m$$
$$= 3(m + 2n - 2) + m$$
$$= 4m + 6n - 6$$
$$\therefore g(m, n) = 2m + 3n - 3$$
$$\therefore g(2013, 12) = 2 \times 2013 + 3 \times 12 - 3$$
$$= 4059$$

【解説】

三角形の個数 $=L$, 辺の個数 $=M$, 点の個数 $=N$ とおくと

$$L = m + 2n - 2, \quad M = 2m + 3n - 3, \quad N = m + n \text{ なので}$$

$$L - M + N = (m + 2n - 2) - (2m + 3n - 3) + m + n = 1$$

これは正 m 角形でなくても一般の凸 m 角形で成立している。これを立体にして穴のない多面体において面を細かく分けて

三角形の個数 $=L$, 辺の個数 $=M$, 点の個数 $=N$ とし, 三角形を1つはがして平面に押しつけると

$(L-1) - M + N = 1$ となるので $L - M + N = 2$ が成立する。この関係は細かく三角形に分けなくても成立し, 実際穴のない多面体では

$$\text{面の個数} - \text{線の個数} + \text{点の個数} = 2$$

が成立している。これをオイラーの関係式といい, このような点, 線, 面のつながりだけに着目した数学をトポロジー (位相幾何学) といい, 数学の重要な一分野で色々な応用もある。正多面体でもオイラーの関係式は次のように成り立っている。

○正四面体 面の個数 $=4$, 線の個数 $=6$, 点の個数 $=4$

$$\text{で } 4 - 6 + 4 = 2$$

○正六面体 面の個数 $=6$, 線の個数 $=12$, 点の個数 $=8$

$$\text{で } 6 - 12 + 8 = 2$$

○正八面体 面の個数 $=8$, 線の個数 $=12$, 点の個数 $=6$

$$\text{で } 8 - 12 + 6 = 2$$

○正十二面体 面の個数 $=12$, 線の個数 $=5 \times 12 \div 2 = 30$,

$$\text{点の個数} = 12 \times 5 \div 3 = 20$$

$$\text{で } 12 - 30 + 20 = 2$$

○正二十面体 面の個数 $=20$, 線の個数 $=3 \times 20 \div 2 = 30$,

$$\text{点の個数} = 3 \times 20 \div 5 = 12$$

$$\text{で } 20 - 30 + 12 = 2 \text{ となっている。}$$

これは正多面体でなくても成立する。例えばサッカーボールのような正五角形と正六角形からなる多面体でもオイラーの関係式が成立しているので調べてみるとおもしろいだろう。



問1

かかぐのこうしえんじゅにあ（科学の甲子園ジュニア）

問2

あるひのことでございます。おしやかさまはござくらくのはすいけのふちをひとりで
ふらふらおあるきになつていらつしやいました。

あくたがわりゆうのすけ「くものいと」より

問3

(1)

暗号文	あ	か	さ	た	な	は	ま	や	ら	わ	ん
平文	も	り		き		た	お	の	ひ		
暗号文	い	き	し	ち	に	ひ	み		り		
平文	や	え	か	く	し	ち					
暗号文	う	く	す	つ	ぬ	ふ	む	ゆ	る		
平文	ゆ	い		け	す	つ	に	は	へ		
暗号文	え	け	せ	て	ね	へ	め		れ		
平文	よ	る	を	う	せ	て					
暗号文	お	こ	そ	と	の	ほ	も	よ	ろ	を	
平文	ら	れ	ん	こ		と		あ	ま		

(2) よくてきました（良く出来ました）

【解説】

問1 8文字ずらした単純なシーザー暗号を使った暗号文である。「あ」を「け」,「い」を「こ」, …,「ん」を「く」とずらすことによって, 平文から暗号文を生成する。ただし,「ゝ」(濁点)はそのまま転記する。解読も単純に反対の操作をすることによって可能である。

問2 暗号文は, 単一換字式暗号によって作成された暗号である。「あいうえおかきく…」をヒントの「くものいとなにぬ…」に置き換えることによって暗号文が生成されている。

問3

- (1) 頻度表より, 一般的な文章では「し」「い」「ん」「か」といった文字の出現頻度が高い(出現頻度 0.06 以上) ことがわかる。一方で暗号文の方では「に」「く」「そ」といった文字の出現頻度が高くなっている。ここで, 暗号文を見ると, 「にゝ」という表現があり, 日本語には「いゝ」「んゝ」といった表現は存在しないため, 「に」は「し」または「か」であると考えられる。逆に「く」「そ」は「い」「ん」のいずれかである可能性が高い。

候補: に → し, か
 く, そ → い, ん

試しに, 「に」→「し」, 「く」→「い」, 「そ」→「ん」と置き換えてみる。

しじちやとてしきんしゝうむよゆたえてたゝしいべぬしゝ、しゝうんいえかあ、よは
おしいとほるやはんたうてしんい、ひいこんしゝねいしんしゝしゝうてえてゝよけほ
まあいろぬ。ねゝらひいこんしゝぬけたあひせふえちあひふふゝつへいははゝたはいほ
まあいろぬ。

これではまだ意味が通じないので, もう少し続きをやってみることとする。暗号文で次に出現頻度の高い文字は「あ」「し」「た」「て」「は」の5つである。この5つが「か」の候補になるが, 「か」には濁点がつく可能性があるので, 「し」か「た」が候補になりそうである。試しに「し」→「か」と置いてみる。

かか^ゝちやとてしきんし^ゝうむよゆたえてた^ゝかいへ^ゝぬか^ゝ、し^ゝうんいえかあ、よはおし
いとほるやはん^ゝたうてしんい、ひいこんし^ゝねいしんか^ゝし^ゝうてえてへ^ゝよけほまあいろ
ぬ。ね^ゝらひいこんし^ゝぬけたあひせふえちあひふふ^ゝつへいはは^ゝたはいほまあいろぬ。

ここで、始めの「かか^ゝちやとてしきんし^ゝうむよ」に着目する。この文章が根岸先生の
メッセージであることを考えると、「かが…」とくれば「かか^ゝくのこうしえん」と考え
られる。さらに、「し^ゝゆにあ」もきちんと当てはまる。おそらく、「ち」→「く」,「や」
→「の」,「と」→「こ」,「て」→「う」,「き」→「え」,「う」→「ゆ」,「む」→「に」,「よ」
→「あ」であろう。これに従って置換する。

かか^ゝくのこうしえんし^ゝゆにあゆたえうた^ゝかいへ^ゝぬか^ゝ、し^ゝゆんいえかあ、あはおし
いこほるのはん^ゝたゆうしんい、ひいこんし^ゝねいしんか^ゝし^ゝゆうえうへ^ゝあけほまあいろ
ぬ。ね^ゝらひいこんし^ゝぬけたあひせふえ^ゝくあひふふ^ゝつへいはは^ゝたはいほまあいろぬ。

ここからは、個々に予測していく。初めの読点は「…が、」となっている。読点がある
場合の「…が、」としては「だが、」「あるが、」「したが、」「ですが、」などが考えられる。
このなかで「〇が」の並びに適当なものは「ですが」である。そこで、出現頻度から
見ても適当であるため、「へ」→「て」「ぬ」→「す」と置いてみる。

かか^ゝくのこうしえんし^ゝゆにあゆたえうた^ゝかいで^ゝすが、し^ゝゆんいえかあ、あはおし
いこほるのはん^ゝたゆうしんい、ひいこんし^ゝねいしんか^ゝし^ゝゆうえうて^ゝあけほまあいろ
す。ね^ゝらひいこんし^ゝすけたあひせふえ^ゝくあひふふ^ゝつていはは^ゝたはいほまあいろす。

良さそうである。次に句点に着目する。2箇所とも「す。」で終わっている。「す。」で
終わるためには「です。」「ます。」である可能性が高いが、「です。」の場合は濁点が必要
となるため、「ます。」であろう。そこで「ろ」→「ま」と置く。

かか^ゝくのこうしえんし^ゝゆにあゆたえうた^ゝかいで^ゝすが、し^ゝゆんいえかあ、あはおし
いこほるのはん^ゝたゆうしんい、ひいこんし^ゝねいしんか^ゝし^ゝゆうえうて^ゝあけほまあいま
す。ね^ゝらひいこんし^ゝすけたあひせふえ^ゝくあひふふ^ゝつていはは^ゝたはいほまあいます。

さて、暗号文の出現頻度に戻って一度整理をする。出現頻度の高い順に並べると、これ
までの作業から次のようになる。

「に」→「し」, 「く」→「い」, 「そ」→「ん」, 「あ」→?, 「し」→「か」, 「た」→?, 「て」→「う」, 「は」→?, 「う」→「ゆ」, 「え」→?, 「ぬ」→「す」, 「ひ」→?

一方で、一般的な文章では出現頻度トップ10（同率もあるので実際にはトップ11）は次のとおりであり、アンダーラインを引いていないものが、まだ置換されていない文字となる。

し, い, ん, か, う, き, た, も, す, ち, よ

「ねいしんか し ゆうえうて あけ」という文章に注目する。「え」の置換先がまだ決まっていないが、まだ置換元が決まっていない「き」「た」「も」「ち」「よ」を鑑みると、「?いしんが重要であ?」と読める。つまり「え」→「よ」である。また、その続きも見ると、「?いしんが重要であ○○○○います。」となるので、適当な言葉を考えると、「?いしんが重要であるとおもいます。」であろう。「る」「と」「お」「も」のいずれもこれまで置換先として使われていないのでよさそうである。しかも、「あ」→「も」は出現頻度的にもトップ10に入っておりよさそうである。つまり、「け」→「る」, 「ほ」→「と」, 「ま」→「お」, 「あ」→「も」と置き換える。

か か く の こ う し え ん し ゆ に あ ゆ た よ う た か い て す が、し ゆ ん い よ か も、あ は お し い こ と る の は ん た ゆ う し ん い、ひ い こ ん し ね い し ん か し ゆ う よ う て あ る と お も い ま す。ね ら ひ い こ ん し す る た も ひ せ ふ よ く も ひ ふ ふ つ て い は は た は い と お も い ま す。

さて、「し ゆ ん い よ か も」という文章がある。おそらく「順位よりも」であろう。「か」→「り」と置換する。

また、「て い は は た は い と お も い ま す」という最後の文章に注目する。暗号文の「は」は頻出文字である。候補は「き」「た」「ち」である。このことから、「て頂きたいと思います。」と予想できる。ここで「は」→「た」, 「た」→「き」となる。

か か く の こ う し え ん し ゆ に あ ゆ き よ う き か い て す が、し ゆ ん い よ り も、あ た お し い こ と る の た ん き ゆ う し ん い、ひ い こ ん し ね い し ん か し ゆ う よ う て あ る と お も い ま す。ね ら ひ い こ ん し す る き も ひ せ ふ よ く も ひ ふ ふ つ て い た た き たい と お も い ま す。

「か か く の こ う し え ん し ゆ に あ ゆ き よ う き か い て す が」は「科学の甲子園ジュニアは競技会ですが」であろう。「ゆ」→「は」となる。「し ゆ ん い よ り も、あ た お し い こ

「とるのたんきゆうしん」は「順位よりも、新しいことへの探究心」と考えられる。「お」→「ら」, 「る」→「へ」となる。

かがくのこうしえんしゅにあはきようきかいてすが、しゅんいよりも、あたらしいことへのたんきゆうしんい、ひいこんしねいしんがしゅうようであるとおもいます。ねらひいこんしするきもひせふよくもひふふつていたたきたいとおもいます。

もう一度出現頻度にもどる。暗号文の出現頻度と平文への対応を整理すると、現在次のようになっている。

「に」→「し」, 「く」→「い」, 「そ」→「ん」, 「あ」→「も」, 「し」→「か」,
「た」→「き」, 「て」→「う」, 「は」→「た」, 「う」→「ゆ」, 「え」→「よ」, 「ぬ」→「す」
「ひ」→?,

となり、トップ10のうち、置換先が定まっていないのは「ひ」のみである。一方平文の出現頻度トップ10と置換元が決定しているものは次のとおりであり、「ち」のみ置換元が決まっていない。

し, い, ん, か, う, き, た, も, す, ち, よ

そこで、「ひ」→「ち」と置く。

かがくのこうしえんしゅにあはきようきかいてすが、しゅんいよりも、あたらしいことへのたんきゆうしんい、ちいこんしねいしんがしゅうようであるとおもいます。ねらちいこんしするきもちせふよくもちふふつていたたきたいとおもいます。

「あたらしいことへのたんきゆうしんい、ちいこんしねいしんがしゅうようであるとおもいます。」という文があり、「新しいことへの探究心や、チャレンジ精神が重要であると思います。」と読める。「い」→「や」, 「こ」→「れ」, 「ね」→「せ」となる。

かがくのこうしえんしゅにあはきようきかいてすが、しゅんいよりも、あたらしいことへのたんきゆうしんや、ちやれんしせいしんがしゅうようであるとおもいます。せらちやれんしするきもちせふよくもちふふつていたたきたいとおもいます。

最後の文章である「せらちやれんしるきもちせふよくもちふふつていたたきたいとおもいます。」は「是非チャレンジする気持ちを強く持ち続けていたたきたいと思います。」であろう。「ら」→「ひ」,「せ」→「を」,「ふ」→「つ」,「つ」→「け」となる。

(2) (1)の解答から得られるマッピングは下記のとおりとなる。

暗号文	よくてきましたちつと○にぬね○はひふへほ○む○○やゆら○る○ろ○○あいうえおかけこ○○せそ
	↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓ ↓↓↓ ↓↓↓↓↓ ↓ ↓ ↓↓↓ ↓ ↓ ↓↓↓↓↓↓↓↓↓ ↓↓
平文	あいうえおかきくけこさしすせそたちつてとなにぬねのはひふへほまみむめもやゆよりりるれろわをん

○の部分を埋めると下記の通りとなる。

暗号文	よくてきましたちつとなにぬねのはひふへほみむめもやゆりりるれろわをんあいうえおかけこさすせそ
	↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓ ↓↓↓ ↓↓↓↓↓ ↓ ↓ ↓↓↓ ↓ ↓ ↓↓↓↓↓↓↓↓↓ ↓↓
平文	あいうえおかきくけこさしすせそたちつてとなにぬねのはひふへほまみむめもやゆよりりるれろわをん

暗号文の行は、頭に「よくてきました(よくできました)」と置き、その最後の文字の「た」から「ちつ(て)と…」と既出の文字以外をあいうえお順に並べたものとなっている。従って、キーワードは「よくてきました」となる。

【作問の意図】

近代の暗号は、アルゴリズムを公開し、鍵のみを秘密にする手法が主流である。これは、アルゴリズムがわかっているという前提の下でも、暗号文から鍵を導出するのを難しくするための技術が発展したことによって可能となった。現在実際に利用されている AES (Advanced Encryption Standard) 等の暗号も、アルゴリズムは公開されており、鍵のみを秘密にする手法をとっている。

では、「暗号文から鍵を導出するのを難しくするための技術」とはいったいなんなのだろうか。答えは、第三者からみた暗号文のでたらめさ加減を最大限にし、平文が推測できないようにすることである。本問題では、わざとでたらめさ加減の小さい暗号文を用いることで、その解読の危険性を示唆するとともに、暗号化アルゴリズムの面白さを紹介している。

問 1 で使われているのはシーザー暗号である。シーザー (Caesar) 暗号は古代ローマにおいてガイウス・ユリウス・カエサル (Gaius Julius Caesar) が使ったと言われる暗号で、問題文にもある通り、平文の文字を辞書順にずらして作成する暗号である。46 文字から成るひらがなの場合、45 種類のずらし方が可能であり、シーザー暗号ということがわかっている場合、何文字ずらすかが鍵となる。別の言い方をすれば、鍵は 45 種類しか存在しないことになり、総当たりでも現実的な時間で解答がわかるレベルとなる。問 1 の場合、鍵は「8」である。

問2で使われているのは単一換字式暗号である。単一換字式暗号は、平文中のある文字が常に暗号文の同じ文字に置換されるような暗号である。シーザー暗号も単一換字式暗号の1種となる。単一換字式暗号の場合には、どの文字をどの文字に置き換えるかという辞書が必要になるが、辞書そのものが鍵となるため、鍵の種類がシーザー暗号とは比較にならない膨大な数となる。46種類の文字が存在しているひらがなでは、 5.5026222×10^{57} 種の鍵が存在することとなり、総当たりは絶望的である。ただし、問2では、始めに「くものいと」という文字列があり、その後に辞書順で「と」の次にくる「なにぬ…」と続いていき、「くものいと」に含まれる字の順がきたらその字をスキップするというアルゴリズムを使っている。このような操作をすることによって、鍵を短く、簡単にすることができる。

多くの鍵を持ち、鍵を予測しにくい単一換字式暗号であるが、それでも弱点がある。問3では文字の出現の割合をもとに、暗号解読を行っている。1対1で文字が対応しているため、どの文字がどの文字に対応しているかはわからずとも、ある文字の出現の割合は等しくなり、これが暗号解読の手がかりとなる。この解析手法は、9世紀に書かれたキンディーの論文「暗号文書の解読について」に示されており、古くから確立していたことがわかる。また、実際に解析した暗号から鍵を割り出す問題もあり、ここまで出来ると本問題の暗号は完全に破られたといって問題無いだろう。



問1

地球は丸いので，直線トンネルの中央は，地表から最も深い位置となる。

$$6400 - \sqrt{(6400 \times 6400 - 20 \times 20)} \div 0.03$$

つまり，中央は出入口よりも地表 30 m くらい深いことになる。

問2

(1) 仮説例：(ウ)

理由：コース②は低いところを通る際に速くなるが，上るときに遅くなり，最終的に①と同じ速さになるから。

- (2) はじめの高さが高いとき ①○秒 ②△秒
はじめの高さが中のとき ①○'秒 ②△'秒
はじめの高さが低いとき ①○"秒 ②△"秒
常に②がはやい。

問3

- (1) 5 秒 (2) 20 m (3) 25 m (4) 5 m/s

問4

18 秒

問5

(1) [計算や考え方]

時間：1枚目の写真が0.01秒。2枚目の写真が0.27秒。その差は0.26秒。

距離：ペットボトルの高さが約21 cm。これを基準にとる。

0.01～0.27秒の間に球が移動した距離はペットボトルの高さより少し短い。

このことから、 $20 \text{ [cm]} \div 0.26 \text{ [s]} = 76.9\cdots$

小数第1位を四捨五入して77 [cm/s]

[答え]

77 cm/s

(2) 水平なレール上を転がる球の速さは一定であり，放物運動している球は常にその真上にあることから，放物運動する物体の水平方向の速さは変化せず一定である。

問6

2 m/s

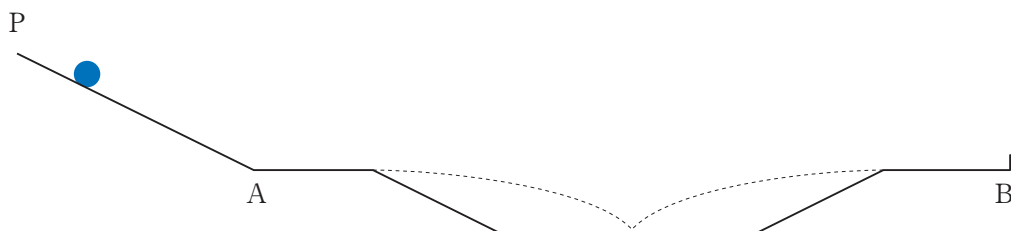
問7

コース①，②ともにA－B間の水平距離は等しい。したがって，各球のこの間の水平方向の平均的な速さが速いほうが，先にゴールに着く。コース①では，A－B間はずっと一定の速さである。一方，コース②の球は，斜面を下るさいに斜面方向に速さを増しているため，水平方向の速さも増している。一番低い水平部では最も速く水平方向に運動している。その後のぼり斜面では斜面方向の速さが減じるが，元の速さに戻るだけなので，この間も水平方向の速さはコース①よりも速い。このように，コース②は，水平方向の速さがコース①と同じか，それよりも速い。このため，コース②の方が常にはやい。

問8

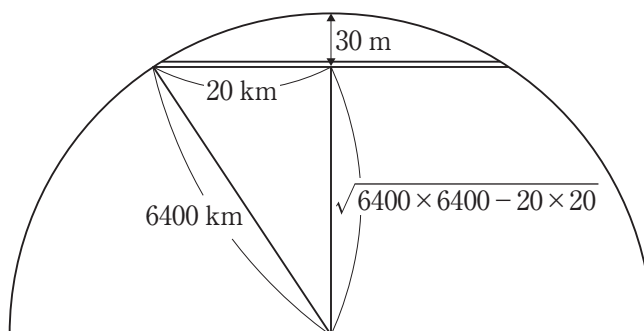
記号：(イ)

具体的な条件：下図のように，球が斜面に沿って運動せず，一番下のコースのちょうど中央に落ちるような高さから球を放せばよい。



【解説】

問1 地球は丸いので、直線トンネルの中央は、図のように地表から最も深い位置となる。



この深さを求めると、図のように中央は出入口よりも地表 30 m くらい深くなる。

問2

問題解決に至る初期段階での科学の方法の流れの一例を示すために、この問題を設定してある。運動の向きや速さが変化する運動なので、中学校の知識では厳密な予想は困難であろう。そこで、ともかく現在持ち合わせている知識で考え始めてみるしかない。科学者も新たな疑問に当たった時の対応は同じである。

(1) この問いでは、現実的な問題を解く際によく行う、現象の抽象化と仮説の設定の場面を設けた。ここでは、仮説が結果と一致するか否かではなく、実験を行う前にこれまでの科学的な知識や体験に基づいて仮説を考えられることを重視している。

〈予想される解答例〉

(ア)コース①の方がはやく B に着く

・同じ高さの場合、球の速さは等しいので、距離の短いコース①がはやく着く。

(イ)コース②の方がはやく B に着く

・コース②では、AB 面より下の位置に球があるとき、速度が速くなるから。

(ウ)コース①②同時に B に着く

・同じ高さの場合、球の速さは等しいので、同時に B に着く。

(2) この問いは、初めに設定した仮説を実験により確認する場面である。

斜面上のスタート位置を任意に3カ所設定してその結果を記録すると、必ずコース②の球の方がはやく着くことが確かめられる。この違いが現れる原因は、②で一度下にさがったコースでの速さの違いである。

また、スタートの高さを変えると、B 点での速さの差も変わる。スタート地点が低いほど、コース②の方がはやく着いている。

問3

問2(2)の結果を合理的に説明するために、必要な知識、考え方、計算方法について理解を深めるための設問である。問2(2)の実験結果を理解するために必要な情報収集の準備（理解の道筋を探る）を、誘導的に行っている。何が必要かを、自ら考えることが必要ではあるが、そこまで問うことは避けた。

(1) 船の幅が 15 m なので、 $15 \text{ [m]} \div 3 \text{ [m/s]} = 5 \text{ [s]}$

(2) (1)より、5 秒間にこの船が進む距離なので

$$4 \text{ [m/s]} \times 5 \text{ [s]} = 20 \text{ [m]}$$

(3) この人がこの 5 秒間に進んだ距離は、船の進行方向と垂直に 15 m で船の進行方向に 20 m。実際に進んだ距離を x とすると、三平方の定理から

$$x^2 = 15^2 + 20^2$$

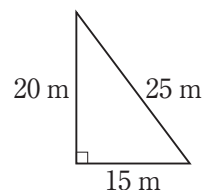
$$= 625$$

$$x = 25$$

よって実際に進んだ距離は 25 m

(4) 地球に対しては、25 m を 5 秒で移動したことになるから、

$$25 \text{ [m]} \div 5 \text{ [s]} = 5 \text{ [m/s]}$$



問4 速度成分での分析の仕方に気づく。

問3の結果から、岸（流れ）に垂直な向きの速さで、川幅を割ればよいことが分かる。岸に向かう速さは、図4の三角形の相似から、2 m/s である。これより、

$$36 \text{ [m]} \div 2 \text{ [m/s]} = 18 \text{ [s]}$$

問5 （得られる情報を活用して、可能な限り、現象の推定をする）

- (1) レール A' の水平な部分を転がる球のおよその速さを求めるには、時間と距離が必要になる。まず、時間は写真に示されているレール A から球が水平に飛び出した瞬間からの経過時間から求める。1 枚目の写真が 0.01 秒。2 枚目の写真が 0.27 秒。その差は 0.26 秒。

距離は、写真にあるペットボトルを基準にとる。つまり、ペットボトルの高さが約 21 cm。0.01 ～ 0.27 秒の間に球が移動した距離はペットボトルの高さより少し短い。

このことから、

$$20 \text{ [cm]} \div 0.26 \text{ [s]} \\ = 76.9 \dots$$

小数第 1 位を四捨五入して 77 [cm/s]

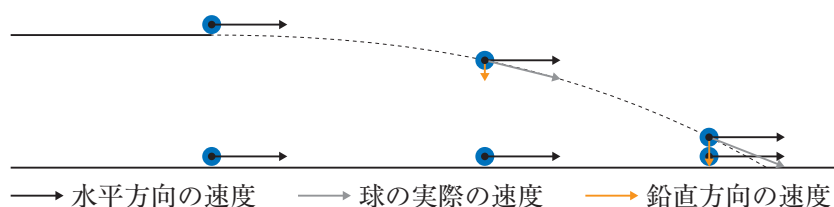
距離の誤差 1 cm を許容として、移動距離を 19 cm とするな

らば 73 [cm/s] で、21 cm ならば 81 [cm/s]

なお、0.01 - 0.31 秒の写真から求めると、78 [cm/s] 程度となる。

- (2) 図に示したように、鉛直方向の速度が大きくなるため、球の運動速度は大きくなるが、水平方向の速度はまったく変わらない。

水平なレール上を転がる球の速さは一定であり、放物運動している球は常にその真上にあることから、放物運動する物体の水平方向の速さは変化せず一定であることがわかる。

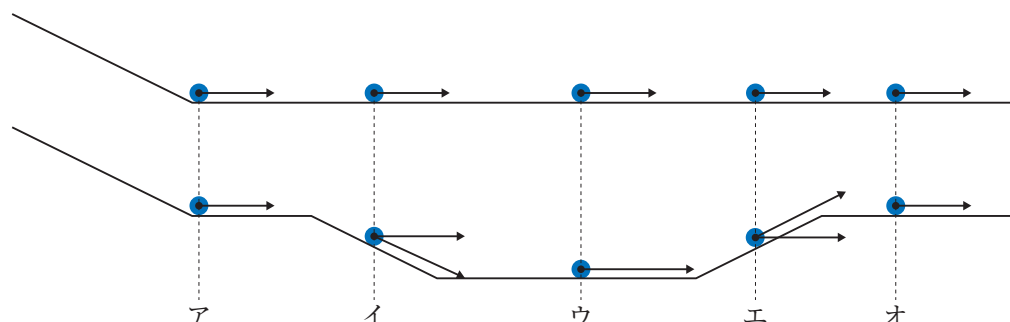


問6 （理解した法則性を演繹的に適用し、現象を分析的にとらえる）

落下時間は写真からおよそ 0.31 秒である。水平方向の速さは一定であるから、
 $0.66 \text{ [m]} \div 0.31 \text{ [s]} = 2.1290 \dots$ よって、約 2 m/s

問7 (科学的手法を振り返る)

理解した知識、法則性などを活用して、当初の問題に対する合理的な説明をすることが必要。ポイントは水平方向の速さ。水平方向の速さのちがいが、コース①②でB点に到達するはやさ(時間)の差になる。

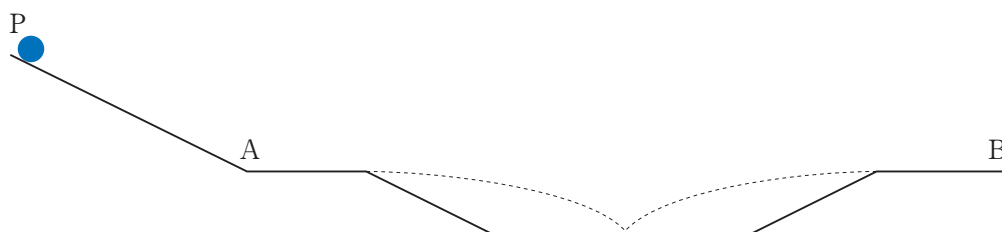


図の点アと点オでは、2球とも水平方向の速さは等しくなる。ところがコース②では、斜面を下る点イで運動速度が大きくなるため水平方向の速さもアに比べて大きくなっている。点ウでは、運動速度が最大になるので、水平方向の速さも最大。斜面をのぼる点エでは運動速度が小さくなるため、水平方向の速さも小さくなるが、はじめの点アよりは大きい。こうして、コース②では、コース①に比べると水平方向の速さが大きい区間があるため、B点にはやく到達することになる。

これをもっと一般的にとらえると、以下のように説明できる。この考え方は問4で用いられている。コース①②ともにA-B間の水平距離は等しい。したがって、各球のこの間の水平方向の平均的な速さが速いほうが、先にゴールに着くといえる。

問8

水平にとび出した物体が空中を運動していれば、水平方向の速さは変化しない。レールとの衝突でもエネルギーが失われなければ、水平方向の速さは一定であり、とび出した高さまでとび上がる。したがって、下図のように下のレールの中央で跳ね返るようなコースにすればよい。



【出題のねらい】

この問題の最終目的は、問2の「重力をうまく使って、しかも高速で移動するために、図1のように、地上の2点A、Bをトンネルでつないで、物体を走らせる。このとき、どんな経路

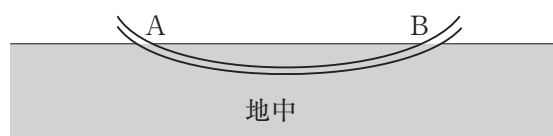


図1

のトンネルにすると、A-B間を最も短い時間で移動できるだろうか。」にあった。たとえば、東京と大阪を適当なトンネルでつなぎ、重力をうまく使って高速で移動する最適の経路は何かということである。

この問題は歴史的には古くから提示され、解決されている。1696年スイスのJohann Bernoulli（ヨハン ベルヌーイ）が「重力の作用の下に2点間を初速度0で滑らせるとき、2点間を最短時間で結ぶ経路とは何か」を出題し、Isaac Newton（アイザック ニュートン）らがこの解答を示している。このような曲線を最速降下曲線（Brachistochrone curve）とよぶ。

この曲線について理解するには、大学レベルの理解が必要である。しかも、実際に地球内にトンネルを掘ると、地球の重力が地上からの深さによって一定ではないので、さらに複雑な問題となる。もちろんこれを実現するには、土木工学的な問題も多数あるに違いない。このため、この問題では、最終目的まで達することなく終わっている。

中学生である君たちに、このような問題は理解不能の遠い世界のように思えるかもしれない。しかし大切なのは、こんな問題を解決する力を身に付けたいという気持ちだ。問題意識を持って学習を継続すれば、解は見えてくる。解決したい問題を見出すためには、幅広い知識と鋭いセンスが必要となる。

君たちが、素晴らしい未来を作るために学習を継続して欲しい。

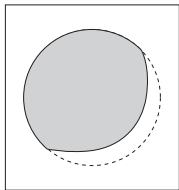


問1

(オ)

問2

三日月の形

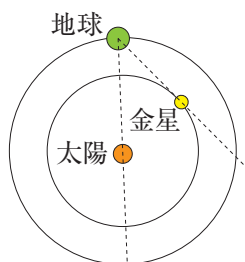


地球と金星の位置関係

(エ)

問3

その1：太陽と金星の位置関係は地球から見て、一定の開き角以上にならない（図には地球から見て金星が最も太陽から離れて見える場合の位置（最大離角）を示してある）。すなわち、地球から見て金星は太陽の近くにもみいるため、日没後、日の出前に太陽の近くによく観察でき、夜中には観察できない。



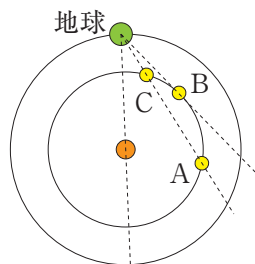
その2：地球から見て金星が、太陽と逆向きの方向にあれば、夜中に見ることができるが、金星は地球の軌道の内側にいるので、それが起きないため。

問4

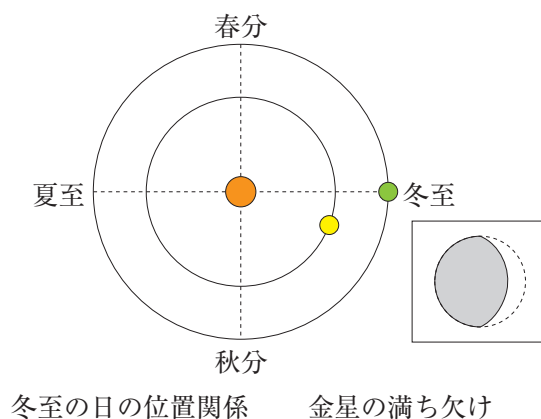
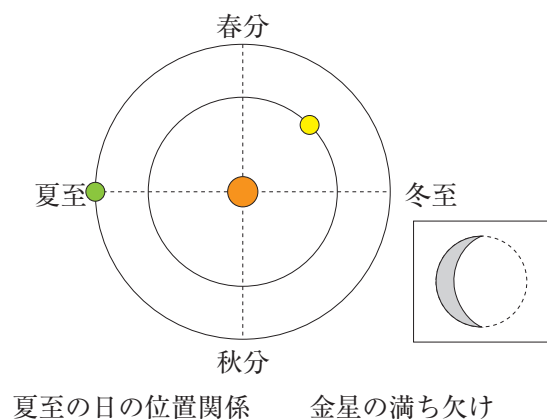
(イ)

問5

地球から見て、金星は太陽から一定の角度以上（最大離角）は離れない。地球から見た金星の太陽からの離れ角が、図中の金星の運動A－B－Cに伴って、その最大値の前後にほぼ同じ角度になる時期（金星の位置A，Cで示す）が2回あることが図からわかる。図2は日没時の金星の位置を示しており、太陽からの離れ角の最大値をはさんで、その角が増減するため交差することが生じた。



問6



問7

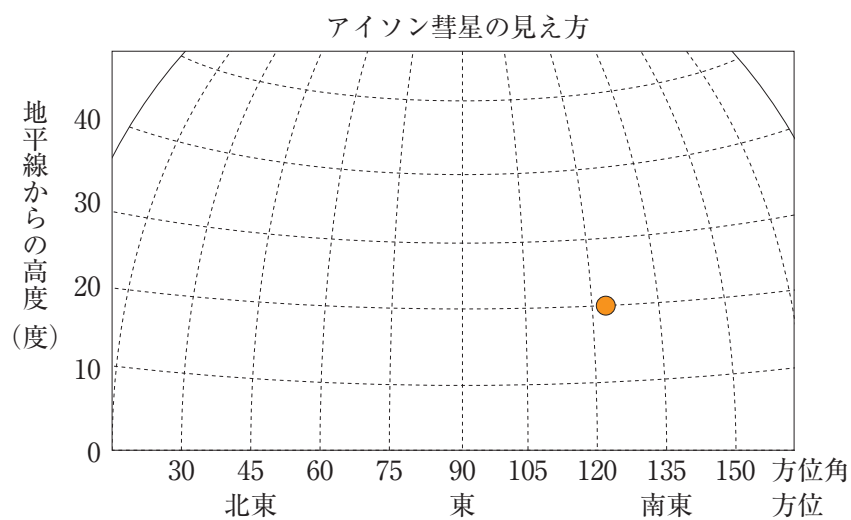
(エ)

問8

太陽に近づくほど運動速度が速い。
イオン，プラズマ等のガスからできた尾がある。
放物線軌道をもつ彗星がある。
軌道面が惑星軌道面に比べて傾きを持つことがある。
塵を含んだ氷成分でできている。
その塵は流星群の起源になる。
核は大きくても数10 km ほどの大きさしかない。
彗星の名前は発見者の名前をつける習慣がある。
尾が2本できる場合がある。
アイソン彗星の軌道傾斜角は 62° 。
アイソン彗星の核の大きさは推定2 km

問9

見える時間帯 日の出前



問10

見える時間 日の出前

問 11

金星ともっとも近づくときの距離 0.65 天文単位

地球ともっとも近づくときの距離 0.43 天文単位

【解説】

問 1

私たちが経験する「日没→夜→日の出→昼」の変化は、「太陽」と「地球の自転に伴う、私たちの地球上での位置関係」で理解できる。この問題では「東京＝北半球北緯 36 度」と「日の出」という出題条件のもとで、視点を太陽において、軌道模型上の地球を眺め、地球上の観測者が地球の自転により、どのように太陽を見ることになるかを理解して正答を得る。

問 2

月が満ち欠けすることは、太陽・地球・月の位置関係によることを、図 1 であらためて理解する。その上で、「日没時の三日月」を図示する。明確にその形を日の出時の三日月（正確には二十七夜の月）と区別し、かつ月を太陽光が照らすことによる正しい欠け具合を示してもらいたい。また、同じ理屈で、太陽光が照らす金星がその軌道上の位置によって、地球から見てどのような満ち欠け状態に見えるかを軌道模型を使って考え、日没時の三日月と同じ形に見える時の太陽・地球・金星の位置関係を選択する。

問 3

金星は地球の内側を回る内惑星であり、軌道模型から明らかなように、地球から見ると、金星は太陽から一定の角度以上離れない（金星と太陽の離れ角）ことがわかる。すなわち、地球からは見かけ上、金星は太陽の近くを運動するため、日没後と日の出前の限られた時間の暗い空に、太陽を追いかけて、もしくは先行するように見ることができる。「深夜の空」は地球から見たとき、太陽の方向とは正反対の方向の空であることを理解できれば、その方向に金星がやってくることができないことを根拠にして解説してもよい。

問 4

今年、4 月から金星を連続して観察していくと、おおかた日没後の西の空にその姿を見ることができ、その日没時の位置は図 2 で示すように大きく変化していく。この問題では、4 月 1 日頃に「金星が太陽とほぼ同時に沈む」をヒントにして、4 月 1 日の地球—金星の軌道上の位置関係を確定する。地球から太陽、金星を見たとき、「同時に沈む」という現象が 3 者のどのような位置関係の時に起こるか、軌道模型を使って考える。

問5

図2に示した日没時の金星の位置が9月以降、特徴的な変化をすることに注目する。この金星の見かけの動きの理由は、地球から見たとき、金星と太陽との離角に最大値があり、かつその角度が時間的に変化する（金星の公転周期が地球より短い）ことによる。図2は日没時の金星の位置なので、太陽の日没時の方位も金星の見える位置の変化に関わってくる。離角は地球から見たときの太陽と金星の位置関係であるが、地球も金星と異なる周期で運動しているため（軌道模型を用いて、金星、地球の位置を変えながら、注意深く離角を眺めていく）、離角の時間変化は単純ではない。本年はその離角が一致する時期が生じたため、みかけ上金星の動きが交差したが、一般には必ずしもそうなるとは限らない。

問6

夏至と冬至の時の地球の位置は軌道模型上に明示してある。そのときの金星の位置は問4で取り上げた「4月1日頃に「ほぼ太陽と同時に沈む」（ほぼ外合）」になることをヒントにして、そこを始点として、金星の周期を考慮し、夏至、冬至の時の金星の軌道上の位置を確定する。そしてそのときの太陽との位置関係から、満ち欠けの様子を検討する。

問7

月の満ち欠けについて図1を参考にすると、半月に見えるのは地球から見たとき、太陽光の方向から90度離れた方向に月がきているときである。これを金星に当てはめると、半月に見える時の太陽と地球と金星の位置関係は太陽—金星—地球のなす角が90度の時であることがわかる。この3者の位置関係が成り立つのがいつ頃か、地球・金星の軌道上での位置を軌道模型を使って調べ、問題で示してあるどの選択肢が適当かを絞っていく。

問8

彗星は尾の延びた姿でイメージされるように、太陽系の中の天体としては、彗星本体の特徴、運動の特徴、見かけ上の特徴などに、惑星と異なるものがある。それらの異なる特徴を整理して記載する。（彗星の核は氷質で、岩石質および有機質の塵を含んでおり、その標準的な大きさは直径～10 km程度で、まれに50 kmほどに達する、など）

問9

アイソン彗星は11月29日にもっとも太陽に接近し、そこで残念ながら崩壊し蒸発したと考えられている。問題では、その数日前の11月23日の彗星の位置を軌道模型を使って調べ、東京の観測者がその彗星を日没後、日の出前のどちらに観察でき、またその時刻に、空のどの辺に彗星があるかを求めている。この日の地球の位置を軌道模型上で示し、太陽と彗星の離れ角を同じく模型を用いて調べ、更に11月23日の太陽の日の出時の方位を考え（冬至の日は東から29度）、彗星の位置を解答用紙の図の中に記入する。

問10

本問ではアイソン彗星は崩壊せずに予想された軌道上をたどったと仮定して、科学の甲子園ジュニア 本大会開催日の翌日（12月23日）にアイソン彗星がどの位置にあり、その日の地球の位置を軌道模型で把握し、アイソン彗星が日の出前に観察できることを理解する。

問11

アイソン彗星軌道と地球・金星軌道をあわせて考え、アイソン彗星がそれらのどちらの惑星とより近く接近するかを調べる。問10で、アイソン彗星が近地点にやってくるのが12月27日と記してあるのでこれを確定情報として距離を求める。加えて金星とアイソン彗星の関係を調べる（もっとも接近するのは12月6日）。軌道模型を活用し、1天文単位に相当する長さを定規・コンパスなどで確定しておき、最接近時の彗星と地球（金星）間の距離を求める。

【出題テーマ】

太陽とその周りを異なる周期で回る惑星（金星と地球）の相対的な位置関係から、地球に住む私たちが、金星をいつ頃、どの方向に、どのような姿（満ち欠け）で見ることができるかを軌道模型を使って考えていく。また、11月から12月にかけて太陽に接近するアイソン彗星を取り上げ、その軌道模型を合体させて、地球・金星との位置関係、見え方を考える。

【出題のねらい】

太陽系の惑星の運動（特に地球と金星に絞って）を、異なる周期で公転する惑星の相対運動としてとらえる。地球上の私たちが日没後、日の出前に見ることができる金星の位置を、惑星軌道上での太陽—金星—地球の位置関係として理解することを問う。そのために地球にいる観測者から金星を見る視点と太陽系を北の方向から眺めて太陽—金星—地球の位置関係を見る視点の両面から考えて問題を解いていく。各チームが問題を解くに当たってこの考え方を支援するために、太陽を中心とした、金星・地球の軌道模型を用意し、地球・金星の公転周期をもとにして、それを活用し、惑星の位置の時間変化を実習形式で探りながら、各設問の解答を導けるように出題を工夫した。

また、この問題では今年の注目される天文イベントの一つである、アイソン彗星を取り上げた。アイソン彗星は11月から12月にかけて太陽・地球に接近し、特に近年の彗星の中では太陽にごく近距離まで接近する彗星であることから、その話題性は大きかったが、2013年11月29日の日本時間早朝に、太陽に最も近づいたときに、彗星の核は崩壊・蒸発し、軌道上にその破片や大きいちりが残ったと考えられている。

多くの人が期待した、長い尾を持つ明るい彗星を見ることはできなかった。本問では、太陽に近づく前後で予想された彗星の運動（位置の時間変化）について理解を深めるために、その軌道模型を各チームに用意した。前出の惑星の軌道模型と組み合わせて、太陽・地球・金星と彗星の位置関係を実際に動かしたり実測して調べるとともに、地球上でのその見え方を検討する。



問1

(ア), (ウ), (エ)

問2

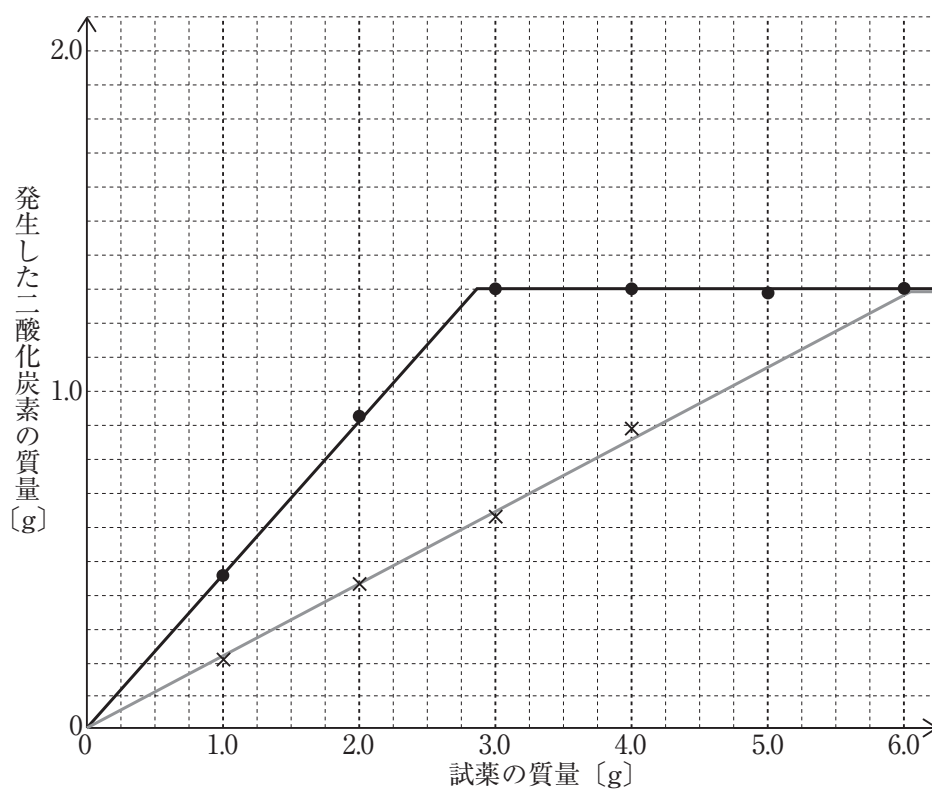
水に溶ける

問3

発生した二酸化炭素の質量 = $a + b - c$ [g]

問4

グラフ



塩酸を全て消費したときの炭酸カルシウムの質量

2.7 ~ 2.9 g を正解とする。

問5

74%

問6

問4のグラフに記載

問7

A 1.04 ~ 1.12 B 1.24 ~ 1.30

問8

2.0~2.4 倍

【解説】

水にどれだけ溶質が溶けているかは、古くから科学者たちの関心事であった。食塩水などであれば水を完全に蒸発させれば、結晶が残るので、その質量から、もともとの濃度を調べることができる。

ところで、食酢のように、加熱すれば溶質である酢酸（さくさん）も蒸発してしまう場合は、工夫を要する。中世ヨーロッパの市場では、食酢としての品質を決めるには指でなめて調べていたが、のちに、一定量の食酢を石灰石と反応させ、発生する二酸化炭素の体積や勢いなどで食酢の品質を評価することもあったという記述がある。

今回は、塩酸と石灰石の反応という、中学1年生の教科書に掲載されている題材を基に、反応の量的関係を問う問題を出題した。

問1 塩酸の性質に関する問題である。

- (ア) 正しい。酸としての性質をもつ。
- (イ) 誤り。溶けているのは塩化水素という気体なので、すべて蒸発してしまう。
- (ウ) 正しい。塩酸に金属を浸すと水素が発生する。
- (エ) 正しい。塩酸は無色透明の水溶液である。
- (オ) 誤り。BTB 溶液では黄色になる。

問2 二酸化炭素は水に少し溶けるため、水上置換法を時間をかけて行くと、体積が減る可能性がある。二酸化炭素を入れたペットボトルに水を入れ、キャップを閉めて激しく振ると、容器がへこんでしまう実験が知られているが、これは二酸化炭素の一部が水に溶けたことを意味する。

問3 実験操作の絵を見て考える。

はじめの塩酸とビーカーの質量に、炭酸カルシウムの質量を加えたものが

$$a + b \text{ [g]}$$

である。炭酸カルシウムをビーカーに入れると、二酸化炭素が発生する。反応後、ビーカーの質量を測定すると c [g] であった。

したがって、発生した二酸化炭素の質量は

$$a + b - c \text{ [g]}$$

である。

問4

問3をもとに、表1の右側のデータをうめていく。ついで、グラフを作成する。

そうすると、はじめは炭酸カルシウムはすべて反応し、直線のグラフになっているのがわかるだろう。ところで、3.0 g 以上では二酸化炭素の発生量が増加せず、グラフが真横になっている。これは、塩酸が全て反応で消費されてしまい、炭酸カルシウムをそれ以上入れても反応しないからである。ここに気付いたかどうか重要である。

炭酸カルシウムの質量[g]	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
発生した二酸化炭素の質量[g]	0.46	0.92	1.30	1.30	1.29	1.30

塩酸を全て消費したときの炭酸カルシウムの質量は、正確には 3.0 g より少なく、2.7 g (もしくは 2.8 g) のところで、グラフの傾きが変わっているのが確認される。

問5

2.0 g で比較すると、炭酸カルシウムでは 0.92 g、石灰石で 0.68 g の二酸化炭素が発生する。

したがって、純度は

$$\frac{0.68}{0.92} \times 100 = 73.9\cdots = 74(\%)$$

問6

問4と同様のグラフを描く。すると、6.0 g 付近で問4の横向きの直線とぶつかりグラフが真横になる。

これは、塩酸が全て反応で消費されてしまい、炭酸バリウムをそれ以上入れても反応しないからである。

炭酸バリウムの質量[g]	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
発生した二酸化炭素の質量[g]	0.21	0.44	0.64	0.89	1.04~1.12	1.24~1.30

問7 グラフから A, B を読み取る。読み取りによって幅があるが A は 1.10 g 程度、B は 1.27 g 程度となる。

問 8 炭酸カルシウム 1.0 g から二酸化炭素は 0.46 g 発生する。いっぽう、炭酸バリウム 1.0 g では、二酸化炭素は 0.21 g しか発生しない。

炭酸バリウムを使って、二酸化炭素 0.46 g を発生させるためには

$$0.46 \div 0.21 = 2.19 \text{ [g]}$$

より 2.2 g 必要である。したがって、必要な炭酸バリウムの質量は、炭酸カルシウムの質量の 2.2 倍になる。

なお、グラフの傾きから求めることもできる。

例えば、二酸化炭素 1.0 g を発生させるのに必要な炭酸カルシウムは 2.15 g、炭酸バリウムは 4.67 g である。したがって、

$$4.67 \div 2.15 = 2.17 \text{ 倍}$$

となる。



問1

紫：白 = 3 : 1

問2

$r r$

問3

(1) $R r$

(2) 紫 ② 白 ④

(3) (a) RR $R r$ $r r$

(b) 孫の代は $RR : R r : r r = 1 : 2 : 1$ となるので, RR と $R r : r r = 3 : 1$ となり, RR と $R r$ は紫, $r r$ は白となるので紫：白 = 3 : 1 となる。

問4

紫：白 = 5 : 3

問5

(1) ① DD ② dd ③ Dd ④ Dd ⑤ dd ⑥ Dd ⑦ dd

(2) 25%

問6

(1) A と O, B と O はそれぞれ, A と B が O を覆い隠す関係だが, A と B は対等で, 一方が他方を覆い隠すことはない。

(2) ① A 型, B 型 AB 型 O 型 ② A 型, B 型 AB 型 O 型

③ A 型, B 型 AB 型

(3) 間違えているのは (父) で正しくは (B) 型

【解説】

問1～問3

オーストリアの修道院の神父であるメンデルが, 8 年の歳月を費やし, エンドウのかけあわせ実験を行った結果, 遺伝に関する法則, いわゆる「メンデルの法則」を発見し, 1865 年に論文として発表した。メンデルより前の時代にも, 「親の性質が子に伝わる」という現

象は知られてはいたものの、その法則までは明らかではなかった。親から子への性質の伝わり方に法則を見出したメンデルの功績は偉大である。

問題文中の「要素」は、現在は「遺伝子」と呼ばれており、アルファベットで表すことが多い。一つの性質は、ペアになった2つの遺伝子により決定する。この1対の遺伝子を問題文中では「要素ペア」としたが、遺伝子の組み合わせは「遺伝子型」と呼ばれる。

本問題のような場合、純系どうし（紫色の純系のエンドウと白色の純系のエンドウ）をかけあわせると、子の代にはどちらか一方の性質が現れる。これを「優性の法則」という。現れる

性質を優性、現れないほうの性質を劣性というが、優性は劣性に比べて優れているという意味ではない。

子の代は優性の遺伝子と劣性の遺伝子をつずつ持っているため、「優性の法則」に従い優性の性質が現れるが、劣性の遺伝子が失われた訳ではない。自家受粉した孫の代では、劣性の遺伝子同士の組み合わせが出来るため、劣性の性質が再び現れることになる。

また、親の遺伝子が子に伝わる際、親のもつ1対の遺伝子は分離して別々の卵や花粉に入るが、これを「分離の法則」という。

親	R R (紫)		×	r r (白)	
	花粉	R	↓	r	卵
子		R r			
	花粉	R	r	↓	R r 卵
孫					
	花粉・卵	R	r		
	R	R R	R r		
	r	R r	r r		
	R R : R r : r r = 1 : 2 : 1				

問4

自家受粉なので、R RとR R、R rとR r、r rとr rの組み合わせである。

R R × R RからはR Rのみ、R r × R rからはR R : R r : r r = 1 : 2 : 1、r r × r rからはr rのみが現れる。R R × R Rから生じた子R Rの数を100とすると、r r × r rから生じた子r rも100である。R r × R rから生じた子R R、R r、r rの合計も100なので、R R : R r : r r = 1 : 2 : 1からR R : R r : r r = 25 : 50 : 25になる。

また、親の数もR R : R r : r r = 1 : 2 : 1なので、R rの親はR Rやr rの親の2倍存在することになる。以上からR R × R Rの親から生じた子R Rを100、r r × r rの親から生じた子r rも100、R r × R rの親から生じた子R R : R r : r r = 25 : 50 : 25、これが2倍となるので、R R : R r : r r = 50 : 100 : 50となる。子の代のR R、R r、r rの数を合わせると、

$$R R = 100 + 50 = 150 \quad R r = 100 \quad r r = 100 + 50 = 150$$

R RとR rが紫なので紫は250　r rは白なので150　紫 : 白 = 250 : 150 = 5 : 3となる。

問5

オシロイバナの花色に見られるのは「不完全優性」という遺伝現象であり、メンデルの優性の法則に従わない例外である。赤色の遺伝子 D と白色の遺伝子 d の優劣関係が不完全のため、 Dd は中間の性質を表す。

問6

- (1) ABO 式血液型の遺伝子は、 O が A 、 B に対して劣性、 A と B の間には優劣関係がない。
- (3) 両親が正しいとすると、子のうち2人が違うことになる。よって両親のどちらかが間違っていることがわかる。子に AB 型が現れていることに注目し、子に AB 型が現れるためには親のどちらかに O 型はいることはない。よって父の血液型が違うことがわかる。

* ABO式血液型とボンベイ式血液型について

赤血球の表面には、様々な糖が鎖状に連なった「糖鎖」と呼ばれる物質が結合している。ABO式血液型は、赤血球表面に結合する糖鎖の違いによって分類した血液型である。

O型の人には、H型物質という糖鎖が結合している。このH型物質の末端に、N-アセチルガラクトサミンという糖（A型物質）が結合すればA型に、ガラクトースという糖（B型物質）が結合すればB型になる。2つとも結合していればAB型である。A型物質やB型物質を結合するために必要な遺伝子が、それぞれA型遺伝子、B型遺伝子となる。

一方、H型物質も、それを作るための遺伝子が必要である。この遺伝子を欠いた場合、H型物質が作られないため、A型遺伝子やB型遺伝子が働いていても、赤血球表面にはA型物質やB型物質は現れなくなる。このような場合、簡易的な血液型判定ではH型物質の有無を区別しないため、見かけ上はO型であると判定されてしまう。これがボンベイ型と呼ばれる血液型である。

